

NICHTLINEARE RANDBEDINGUNGEN
BEI PROBLEMEN VOM
TYP DER WELLENGLEICHUNG

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von
ANDREAS STAHEL
aus Elgg ZH

Begutachtet von
Prof. Dr. H. Amann
Prof. Dr. P. Hess

Zürich 1987
Zentralstelle der Studentenschaft

NICHTLINEARE RANDBEDINGUNGEN
BEI PROBLEMEN VOM
TYP DER WELLENGLEICHUNG

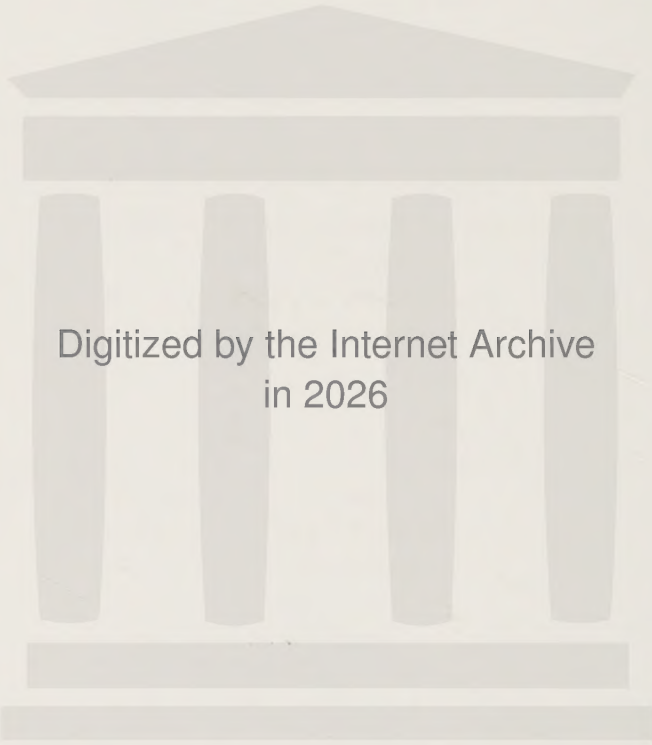
INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von
ANDREAS STAHEL
aus Elgg ZH

Begutachtet von
Prof. Dr. H. Amann
Prof. Dr. P. Hess

Zürich 1987
Zentralstelle der Studentenschaft



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
	Bezeichnungen	4
2.	Abstrakte Resultate	5
	Schwache Lösungen	9
	Milde Lösungen	11
3.	Anfangs-Randwertprobleme vom Typ der Wellengleichung	18
	Probleme vierter Ordnung	22
4.	Die Gleichungen der schwingenden Platte	37
5.	Anhang	47
	Referenzen	56

1. Einleitung

In der vorliegenden Dissertation wird ein Verfahren entwickelt, um auf einem beschränkten Gebiet Ω in $\mathbb{R}^n$ semilineare Anfangs-Randwertprobleme vom Typ der Wellengleichung zu lösen, d.h.

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{u} + \mathcal{A}u &= F(u, \dot{u}) \\ Bu &= G(u) \\ u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}$ ein elliptischer, formal selbstadjungierter Differentialoperator der Ordnung $2m$ ist und $B = (B_1, \dots, B_m)$ geeignete Randoperatoren. Die Gleichung der schwingenden Platte ist ein Beispiel des obigen Typs. Als wesentliches, neues Resultat dieser Arbeit können wir auch nichtlineare Randterme $G(u)$ betrachten.

Wir wollen (1) lösen, indem wir die Theorie der linearen Halbgruppen auf Banachräumen verwenden. Diese ist allerdings nur für den Fall der homogenen Randbedingungen $G = 0$ entwickelt worden (vergleiche z.B. Tanabe [19]). Wir zeigen einen abstrakten, funktionalanalytischen Zugang zum Problem (1) auf. In einigen neueren Arbeiten hat Amann ähnliche Probleme untersucht. Er behandelt aber Gleichungen, deren zugehöriges lineares Problem eine analytische Halbgruppe erzeugt. Das ist bei der Gleichung (1) nicht der Fall. Der lineare Teil von (1) erzeugt eine unitäre C_0 -Gruppe auf einem geeigneten Hilbertraum. Obwohl (1) für $m > 1$ ein parabolisches Problem ist, zeigen die Lösungen ein ähnliches Verhalten wie die Lösungen der Wellengleichung ($m = 1$). Deshalb nennen wir (1) auch eine Gleichung vom Typ der Wellengleichung. Obwohl sich die Lösungen der von Amann betrachteten Gleichungen und von (1) in ihrem Verhalten wesentlich unterscheiden, lassen sich die grundlegenden funktionalanalytischen Ideen übertragen.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung der schwingenden Platte, bei gegebener Kraftdichte f (bzw. g) auf der Plattenfläche (bzw. dem Rand). Für kleine Auslenkungen wird dieses physikalische System beschrieben durch die folgenden Gleichungen (siehe Abschnitt 4):

$$(2) \quad \begin{aligned} \ddot{u}(x, t) + \Delta \Delta u(x, t) &= f(u(x, t)) && \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \\ B_1 u(x, t) &= 0 && \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ B_2 u(x, t) &= g(u(x, t)) && \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{aligned},$$

wobei

$$\begin{aligned} B_1 u &:= \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^2 u + \sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 u + \kappa \frac{\partial}{\partial \nu} u\right) \\ B_2 u &:= -\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u - (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \mu} u \end{aligned}$$

Durch formale Operationen können wir (2) ersetzen durch ein System von Integralgleichungen. Die formalen Operationen entsprechen einer verallgemeinerten Formel für die Variation der Konstanten (vergleiche Amann [6]). Wir nennen u eine milde Lösung von (2), falls die folgenden Gleichungen gelöst werden:

$$\begin{aligned} (3_1) \quad u(T) &= \cos(TA^{1/2})u(0) + \sin(TA^{1/2})A^{-1/2}\dot{u}(0) - \\ &+ (id - \cos(TA^{1/2}))(A^{-1}F(u(0)) + RG(u(0))) + \\ &+ \int_0^T (id - \cos((T-t)A^{1/2})) \\ &\quad \left(A^{-1}F^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) + RG^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3_2) \quad \dot{u}(T) &= -\sin(TA^{1/2})A^{1/2}u(0) + \cos(TA^{1/2})\dot{u}(0) + \\ &+ \sin(TA^{1/2}) \left(A^{-1/2}F(u(0)) + A^{1/2}RG(u(0)) \right) + \\ &+ \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2}) \\ &\quad \left(A^{-1/2}F^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) + A^{1/2}RG^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) \right) dt \end{aligned}$$

Die genaue Bedeutung der Terme ist dem Inneren der Arbeit zu entnehmen. Betrachtet man (3) in geeigneten Extrapolationsräumen, so sind die Integralgleichungen "wohlformuliert" und lassen sich für kleine Zeiten T lösen.

Im zweiten Abschnitt führen wir den Begriff der milden Lösung in einem abstrakten Rahmen ein. Wir zeigen, dass er äquivalent ist zum wohlbekannten Begriff einer schwachen Lösung (Theorem 2.3). Als einfache Konsequenz des Banach'schen Fixpunktsatzes erhalten wir einen abstrakten Existenz- und Eindeigkeitssatz für milde Lösungen von Gleichungen vom Typ der Wellengleichung (Theorem 2.4). Anschliessend zeigen wir, dass der abstrakte Rahmen konkrete partielle Differentialgleichungen der Ordnung $2m$ umfasst. Für Probleme vierter Ordnung (z.B. (2)) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \leq 7$) ergibt sich, dass mit sehr schwachen Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten f und g (Stetigkeitsbedingungen) das entsprechende Problem für "beliebige" Anfangswerte eine lokale (bezüglich der Zeit), milde Lösung besitzt (Theorem

3.4). Erfüllen f und g gewisse Strukturbedingungen, so existiert die Lösung global. Angewandt auf das Problem (2) erhalten wir für Funktionen $f, g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das folgende Resultat (Theorem 4.5):

Für $\varepsilon > 0$ genügend klein und für Anfangswerte $u(0), \dot{u}(0)$ mit

$$(u(0), \dot{u}(0)) \in H_{\{B\}}^{7/2-\varepsilon} \times H^{3/2-\varepsilon}$$

gibt es ein maximales Intervall $J = (T^-, T^+)$ und eine eindeutige, milde Lösung u von (2) mit

$$u \in C^0(J, H^{7/2-\varepsilon}) \cap C^1(J, H^{3/2-\varepsilon}) \cap C^2(J, H^{-1/2-\varepsilon})$$

Gilt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$(4) \quad \int_0^s f(\tau) d\tau \leq 0 \quad \text{und} \quad \int_0^s g(\tau) d\tau \leq 0 \quad ,$$

so existiert die Lösung global (d.h. $T^+ = \infty$).

Für allgemeine Gleichungen vierter Ordnung mit dämpfendem Term $k\dot{u}$ ergibt sich aus der Äquivalenz von milden und schwachen Lösungen, dass die Energie des Systems exponentiell abfällt für grosse Zeiten. Damit können wir leicht zeigen, dass auch die Lösung (bzw. gewisse Funktionennormen der Lösung) exponentiell abfällt (Satz 3.6).

Im letzten Abschnitt behandeln wir als Anwendungsbeispiel die sogenannten von Karman-Gleichungen. Sie beschreiben dasselbe physikalische System wie (2), aber es sind grössere Auslenkungen zugelassen. Wir erhalten eine lokale, milde Lösung mit denselben Regularitätseigenschaften wie die Lösung von (2) (Theorem 4.2). Erfüllen die Nichtlinearitäten die Bedingung (4), so können wie eine a-priori Abschätzung herleiten. Die globale Existenz dieser Lösung können wir nicht zeigen, aber wir geben Bedingungen an, die zu globaler Existenz führen.

Der Anhang beinhaltet einige elementare, technische Lemmata.

Das Thema dieser Dissertation geht auf eine Anregung von Prof. Dr. H. Amann zurück. Für seine vorbildliche Betreuung möchte ich ihm ganz herzlich danken. Ebenso danke ich den Arbeitskollegen Anne Drangeid und Thomas Hintermann für die vielen anregenden Gespräche und Ludivica Baselgia für die Korrektur von vielen Tippfehlern.

Bezeichnungen

Sind X_i Banachräume, so sind $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ die stetigen, linearen Abbildungen von X_1 in X_2 . Bilineare Abbildungen werden mit $\mathcal{L}^2$ bezeichnet. Ist X_1 stetig eingebettet in X_2 , so schreiben wir

$$X_1 \hookrightarrow X_2 \quad .$$

Ist zusätzlich X_1 dicht in X_2 , so bezeichnen wir das mit

$$X_1 \overset{d}{\hookrightarrow} X_2 \quad .$$

In der ganzen Arbeit ist Ω ein glattes, beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand Γ . Ist bei Funktionenräumen kein Gebiet angegeben, auf dem sie definiert sind, so ist dafür immer Ω zu wählen. Mit

$$W^{k,p} = W^{k,p}(\Omega) \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p < \infty$$

bezeichnen wir die üblichen Sobolevräume (vgl. Adams [1]) und $H^s = W^{s,2}$ ist für $s \notin \mathbb{N}$ durch komplexe Interpolation zwischen geeigneten $W^{k,2}$ definiert (siehe Triebel [21]).

Mit $C^1-(X_1, X_2)$ bezeichnen wir die lokal lipschitzstetigen Abbildungen von X_1 in X_2 . Wie allgemein üblich ist $\dot{u}$ die Zeitableitung von u und andere Differentialoperatoren (z.B. Δ) sollen sich nur auf die Raumkoordinaten beziehen. Wir verwenden die Kurzschreibweise

$$\partial_i u := \frac{\partial}{\partial x_i} u \quad \partial_{ij} u := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u \quad .$$

Mit c (ev. a) bezeichnen wir schliesslich positive Konstanten. Sie werden im Verlaufe von Beweisen oft modifiziert, ohne dass dies in der Notation ersichtlich wird. Es sollte aus dem Zusammenhang klar sein, wie die Konstanten zu konstruieren sind.

2. Abstrakte Resultate

In diesem Abschnitt verwenden wir Resultate von Amann [5] im Spezialfall von selbstadjungierten Operatoren auf Hilberträumen. Dann führen wir die Begriffe milde und schwache Lösung für Probleme vom Typ der Wellengleichung ein und zeigen, dass sie äquivalent sind, falls die Nichtlinearitäten gewisse Voraussetzungen erfüllen.

Seien

$$\begin{aligned} & W \text{ und } \partial W \text{ reelle Hilberträume, } \quad W = W', \quad \partial W = \partial W' \\ & W^1, \overset{\circ}{W}^1, \partial W^1 \text{ und } \partial W_1^1 \text{ Hilberträume mit} \\ (A1) \quad & \overset{\circ}{W}^1 \hookrightarrow W^1 \hookrightarrow W \xrightarrow{d} \overset{\circ}{W}^{-1} := (\overset{\circ}{W}^1)' , \quad \overset{\circ}{W}^1 \xrightarrow{d} W , \\ & \partial W^1 \xrightarrow{d} \partial W, \quad \partial W_1^1 \xrightarrow{d} \partial W \quad \text{und} \\ & \partial W^{-1} := (\partial W_1^1)', \quad \partial W_1^{-1} := (\partial W^1)' . \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E' \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

die Dualitätspaarung, so folgt aus dem Theorem von Hahn-Banach

$$\partial W^1 \xrightarrow{d} \partial W \xrightarrow{d} \partial W^{-1}, \quad \partial W_1^1 \xrightarrow{d} \partial W \xrightarrow{d} \partial W_1^{-1} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\overset{\circ}{W}^{-1}} &= \langle u, v \rangle_W =: \langle u, v \rangle \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}^1 \quad v \in W \\ \langle u, v \rangle_{\partial W^{-1}} &= \langle u, v \rangle_{\partial W} =: \langle u, v \rangle_{\partial} \quad \forall u \in \partial W_1^1 \quad v \in \partial W \\ \langle u, v \rangle_{\partial W_1^{-1}} &= \langle u, v \rangle_{\partial W} =: \langle u, v \rangle_{\partial} \quad \forall u \in \partial W^1 \quad v \in \partial W \end{aligned}$$

Wegen der obigen Gleichungen können wir alle Dualitätspaarungen auf "Gebietsräumen" W (bzw. "Randräumen" ∂W) mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial}$) bezeichnen, ohne dass Verwechslungen zu befürchten sind. Weiter setzen wir voraus, dass

$$\begin{aligned} & A \in \mathcal{L}(W^1, W), \quad T := (B, C) \in \mathcal{L}(W^1, \partial W^1 \times \partial W_1^1), \\ (A2) \quad & \ker T \supset \overset{\circ}{W}^1, \quad T \text{ sei eine Retraktion und} \\ & (A, B) \in \text{Isom}(W^1, W \times \partial W^1). \quad \text{Es gelte die Green'sche Formel} \end{aligned}$$

$$\langle Au, v \rangle + \langle Bu, Cv \rangle_{\partial} = \langle u, Av \rangle + \langle Cu, Bv \rangle_{\partial} \quad \forall u, v \in W^1,$$

wobei der Operator T (nach Definition) genau dann eine Retraktion ist, wenn er eine stetige Rechtsinverse besitzt. Nun definieren wir

$$A_0 := A|_{\overset{\circ}{W}^1} \in \mathcal{L}(\overset{\circ}{W}^1, W)$$

und erhalten

$$(1) \quad \mathcal{A}'_0 \in \mathcal{L}(W, \overset{\circ}{W}^{-1}) \quad .$$

Da für alle $u \in \overset{\circ}{W}^1, v \in W^1$

$$(2) \quad \langle \mathcal{A}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{A}v \rangle$$

gilt, haben wir

$$\mathcal{A}'_0 \supset \mathcal{A} \quad .$$

Sei $\hat{\mathcal{A}}$ die W -Realisierung von $\mathcal{A}'_0$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) &:= \{u \in W \mid \mathcal{A}'_0 u \in W\} \\ \hat{\mathcal{A}}u &:= \mathcal{A}'_0 u \quad . \end{aligned}$$

Dann wird $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}})$, versehen mit der Graphennorm, zu einem Banachraum mit

$$(3) \quad \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) \hookrightarrow W \quad .$$

Betrachten wir nun $\mathcal{A}$ als unbeschränkten Operator in W , so sehen wir, dass er abschliessbar ist (wegen (2)) und bezeichnen den Abschluss von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_c$. Wir verlangen

$$(A3) \quad \hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_c \quad .$$

Beachte, dass (A3) äquivalent ist zu

$$(A3') \quad W^1 \xrightarrow{d} \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}) \quad .$$

Nun verwenden wir [5] Theorem 4.1 und erhalten eine eindeutige stetige Erweiterung $\hat{T}$ von T mit

$$(4) \quad \hat{T} = (\hat{B}, \hat{C}) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}), \partial W^{-1} \times \partial W_1^{-1})$$

und es gilt die verallgemeinerte Green'sche Formel

$$(5) \quad \begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{A}}u, v \rangle + \langle \hat{B}u, Cv \rangle_{\partial} &= \langle u, \mathcal{A}v \rangle + \langle \hat{C}u, Bv \rangle_{\partial} \\ &\quad \forall u \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{A}}), \quad \forall v \in W^1. \end{aligned}$$

Aus [5] Theorem 5.2 folgt

$$(6) \quad (\hat{A}, \hat{B}) \in \text{Isom}(\mathcal{D}(\hat{A}), W \times \partial W^{-1}).$$

Mit $[\cdot, \cdot, \cdot]_\alpha$ bezeichnen wir den komplexen Standard-Interpolationsfunktork (vergleiche Bergh, L fstr m [7]) und definieren für $0 < \alpha < 1$

$$(7) \quad \begin{aligned} W^\alpha &:= [W, W^1]_\alpha, \quad W_B^1 := \ker B \hookrightarrow W^1, \quad W_B^\alpha := [W, W_B^1]_\alpha, \\ \partial W^{-1+2\alpha} &:= [\partial W^{-1}, \partial W^1]_\alpha, \quad \partial W_1^{-1+2\alpha} := [\partial W_1^{-1}, \partial W_1^1]_\alpha. \end{aligned}$$

Das impliziert

$$(\partial W^{-1+2\alpha})' = \partial W_1^{1-2\alpha},$$

und wegen (3) gilt

$$(8) \quad [\mathcal{D}(\hat{A}), W^1]_\alpha \xrightarrow{d} W^\alpha.$$

Nun interpolieren wir zwischen (A2) und (4),(6) und erhalten

$$(9) \quad \begin{aligned} (\mathcal{A}, B) &\in \text{Isom} \left([\mathcal{D}(\hat{A}), W^1]_\alpha, W \times \partial W^{-1+2\alpha} \right), \\ C &\in \mathcal{L} \left([\mathcal{D}(\hat{A}), W^1]_\alpha, \partial W_1^{-1+2\alpha} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$Au = 0$$

$$Bu = G$$

hat somit einen eindeutigen Lösungsoperator R , der gegeben ist durch

$$RG := u.$$

Aus (8) und (9) folgt

$$(10) \quad R \in \mathcal{L}(\partial W^{-1+2\alpha}, [\mathcal{D}(\hat{A}), W^1]_\alpha) \in \mathcal{L}(\partial W^{-1+2\alpha}, W^\alpha).$$

Wir setzen

$$A := \mathcal{A}|_{W_B^1}$$

und betrachten A als unbeschränkten Operator in W . Wegen (A2) ist A symmetrisch und dicht definiert. Theorem 13.11 in Rudin [17] zeigt, dass A selbstadjungiert ist

und wir setzen zusätzlich voraus, dass A strikt positiv ist, d.h. es existiert ein $a_0 > 0$, so dass

$$(A4) \quad \langle Au, u \rangle \geq a_0 \|u\|_W^2 \quad \forall u \in W_B^1.$$

Damit ist A Generator einer Kontraktionshalbgruppe auf W und wir können die Resultate von Amann ([3] Abschnitt 1) über gebrochene Exponenten und Extrapolation von Generatoren anwenden. Für $0 < \alpha < 1$ ist

$$\mathcal{D}(A^\alpha) = W_B^\alpha$$

mit äquivalenten Normen (siehe Triebel [21] 1.18.10 oder Taylor [20]). Deshalb nehmen wir die obige Gleichung als Definition von W_B^α für beliebige positive α . Für $\alpha < 0$ sei W_B^α die Vervollständigung von $(W, \|\cdot\|_{(\alpha)})$, wobei

$$\|u\|_{(\alpha)} := \|A^\alpha u\| \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^\alpha),$$

(vergleiche Amann [3]). Für diese Skala W_B^α $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} A^\alpha &\in \text{Isom}(W_B^{\alpha+\beta}, W_B^\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ W_B^{-\alpha} &= (W_B^\alpha)' \end{aligned}$$

Da A positiv und selbstadjungiert ist, können wir A^α auch mittels Spektralkalkül berechnen (Tanabe [19] Theorem 2.3.2). Ebenso erhalten wir für $t \in \mathbb{R}$ die beschränkten Operatoren

$$\sin(tA^{1/2}), \quad \cos(tA^{1/2}) \in \mathcal{L}(W_B^\alpha, W_B^\alpha),$$

die in der Operatornorm durch 1 beschränkt sind, da $\sin$ und $\cos$ als reellwertige Funktionen beschränkt sind. Für beliebige $u \in W_B^\alpha$ gilt

$$\begin{aligned} [t \mapsto \sin(tA^{1/2})u] &\in C^0(\mathbb{R}, W_B^\alpha) \cap C^1(\mathbb{R}, W_B^{\alpha-1/2}), \quad \text{mit} \\ \frac{d}{dt} \sin(tA^{1/2})u &= \cos(tA^{1/2})A^{1/2}u \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [t \mapsto \cos(tA^{1/2})u] &\in C^0(\mathbb{R}, W_B^\alpha) \cap C^1(\mathbb{R}, W_B^{\alpha-1/2}), \quad \text{mit} \\ \frac{d}{dt} \cos(tA^{1/2})u &= -\sin(tA^{1/2})A^{1/2}u. \end{aligned}$$

Schwache Lösungen

In einem offenen Intervall J , das 0 enthält, wollen wir das folgende Problem lösen:

$$(P0) \quad \begin{aligned} \ddot{u}(t) + Au(t) &= F(t) \\ Bu(t) &= G(t) \end{aligned}$$

Dazu benötigen wir die Voraussetzungen :

$$(A5) \quad \begin{aligned} &\partial_0 W^0 \text{ ist ein abgeschlossener Unterraum von } \partial W^0 \\ &\text{mit } R(\partial_0 W^0) \subset W_B^{1/2} \text{ und} \\ &(u, v) \mapsto \langle Cu, v \rangle_{\partial} \in \mathcal{L}^2(W_B^{1/2} \times \partial_0 W^0, \mathbb{R}) . \\ &\text{Es existiert ein } a \in \mathcal{L}^2(W_B^{1/2} \times W_B^{1/2}, \mathbb{R}) \text{ mit} \\ &\langle \varphi, Au \rangle + \langle C\varphi, Bu \rangle_{\partial} = a(\varphi, u) \quad \forall \varphi \in W_B^{1/2} \quad \forall u \in W^1 \cap W_B^{1/2} . \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass von $u \in W^1 \cap W_B^{1/2}$ nicht auf $u \in \ker B$ geschlossen werden kann. In einem gewissen Sinne erhalten wir hier den Spielraum, der es uns ermöglichen wird, $G \neq 0$ zu behandeln.

Wir nennen nun u eine schwache Lösung von (P0), falls

$$(11) \quad \begin{aligned} &u \in C^0(J, W_B^{1/2}) \cap C^1(J, W) \\ &F \in C^0(J, W_B^{-1/2}), \quad G \in C^0(J, \partial_0 W^0) \\ &\langle \varphi(T), \dot{u}(T) \rangle - \langle \varphi(0), \dot{u}(0) \rangle - \int_0^T \langle \dot{\varphi}(t), \dot{u}(t) \rangle \, dt = \\ &= \int_0^T -a(\varphi(t), u(t)) + \langle \varphi(t), F(t) \rangle + \langle C\varphi(t), G(t) \rangle_{\partial} \, dt \\ &\forall \varphi \in C^0(J, W_B^{1/2}) \cap C^1(J, W) \quad \text{und } \forall T \in J . \end{aligned}$$

Die Formel für schwache Lösungen entsteht formal durch Multiplikation der ersten Zeile von (P0) mit φ und der zweiten mit $C\varphi$, dann summiert man die beiden, verwendet die Greensche Formel und integriert über die Zeit.

Proposition 1

Jede schwache Lösung von (P0) erfüllt die folgende Gleichung für alle $T \in J$:

$$(12) \quad \begin{aligned} u(T) &= \cos(TA^{1/2})u(0) + \sin(TA^{1/2})A^{-1/2}\dot{u}(0) \\ &+ \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2}) \left(A^{-1/2}F(t) + A^{1/2}RG(t) \right) dt \end{aligned}$$

Bemerkungen

A Durch heuristische Argumente ist es möglich, die Gleichung (12) direkt herzuleiten ohne den Umweg über schwache Lösungen (vergleiche Amann [4] und [6]). Die obige Proposition rechtfertigt die formalen Argumente in [4] und [6]. Es ist zu bemerken, dass Amann Gleichungen erster Ordnung (in der Zeit) betrachtet hat, aber es ist offensichtlich, wie seine Argumente zu modifizieren sind für den Fall von Gleichungen vom Typ der Wellengleichung.

B Aus (12) und den Regularitätsvoraussetzungen an F und G in (11) folgt

$$u \in C^0(J, W_B^{1/2}) \quad ,$$

falls die Anfangswerte passend gewählt werden. Indem wir (12) nach der Zeit T differenzieren, erhalten wir

$$(12') \quad \begin{aligned} \dot{u}(T) = & -\sin(TA^{1/2})A^{1/2}u(0) + \cos(TA^{1/2})\dot{u}(0) \\ & + \int_0^T \cos((T-t)A^{1/2})A^{1/2} \left(A^{-1/2}F(t) + A^{1/2}RG(t) \right) dt \quad . \end{aligned}$$

Daraus lesen wir wie oben ab, dass $u \in C^1(J, W)$. Somit sehen wir, dass die Regularität von u aus (12) folgt, falls F und G (11) erfüllen.

Beweis

Wir verwenden eine Modifikation des Beweises von Theorem 2.4.6 in Fattorini [8]. Wir wählen $u^* \in W_B^{1/2}$ und $T \in J$ fest und setzen

$$v^*(t) := A^{-1/2} \sin((T-t)A^{1/2})u^* \quad \forall t \in J \quad .$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} v^* & \in C^0(J, W_B^1) \cap C^1(J, W_B^{1/2}) \\ \dot{v}^*(t) & = -\cos((T-t)A^{1/2})u^* \quad . \end{aligned}$$

Mit (A5) erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} a(v^*(t), u(t)) & = \langle \mathcal{A}A^{-1/2} \sin((T-t)A^{1/2})u^*, u(t) \rangle \\ & = \langle A^{1/2} \sin((T-t)A^{1/2})u^*, u(t) \rangle \end{aligned}$$

und mit der Green'schen Formel (5) folgt

$$\begin{aligned} \langle C v^*(t), G(t) \rangle_\partial & = \langle C v^*(t), \hat{B}RG(t) \rangle_\partial + \langle v^*(t), \hat{A}RG(t) \rangle \\ & = \langle A v^*(t), RG(t) \rangle \\ & = \langle u^*, \sin((T-t)A^{1/2})A^{1/2}RG(t) \rangle \quad . \end{aligned}$$

Verwenden wir diese Gleichungen in (11) mit $\varphi(t) := v^*(t)$ und

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{v}^*(t), u(t) \rangle = \langle -A^{1/2} \sin((T-t)A^{1/2}) u^*, u(t) \rangle + \langle \dot{v}^*(t), \dot{u}(t) \rangle,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \langle v^*(0), \dot{u}(0) \rangle - \langle \dot{v}^*(T), u(T) \rangle + \langle \dot{v}^*(0), u(0) \rangle = \\ & = \int_0^T \langle v^*(t), F(t) \rangle + \langle u^*, \sin((T-t)A^{1/2}) A^{1/2} R G(t) \rangle \, dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned} \langle u^*, u(T) \rangle &= \langle u^*, \cos(TA^{1/2}) u(0) + \sin(TA^{1/2}) A^{-1/2} \dot{u}(0) \rangle + \\ &+ \langle u^*, \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2}) (A^{-1/2} F(t) + A^{1/2} R G(t)) \, dt \rangle \end{aligned}$$

für alle $u^* \in W_B^{1/2}$ und für alle $T \in J$. Wegen

$$W_B^{1/2} \hookrightarrow W$$

ist u eine Lösung von (12).

[]

Für gegebene nichthomogene Terme F und G in (P0) ist es möglich, direkt Lösungen der Integralgleichung (12) zu suchen. Es wird sich aber zeigen, dass es vorteilhaft ist, (12) zu ersetzen durch ein System von Integralgleichungen, das den Vorteil eines zusätzlichen Terms $A^{-1/2}$ unter dem Integralzeichen hat.

Milde Lösungen

Sei nun $F = F_1 + F_2$ mit den Regularitätsvoraussetzungen

$$\begin{aligned} F_1 &\in C^1(J, W_B^{1/2}), & F_2 &\in C^0(J, W) \\ G &\in C^1(J, \partial_0 W^0) & \text{mit} \\ F_1^{(1)}(t) &:= \frac{d}{dt} F_1(t), & G^{(1)}(t) &:= \frac{d}{dt} G(t). \end{aligned}$$

Um (14) zu erhalten differenzieren wir (12), wobei wir nicht $\sin((T-t)A^{1/2})$ unter dem Integral ableiten, sondern die obigen Voraussetzungen verwenden. Durch abschliessende Integration bekommen wir (13) und somit das folgende System von Gleichungen :

$$\begin{aligned}
(13) \quad u(T) &= \cos(TA^{1/2})u(0) + \sin(TA^{1/2})A^{-1/2}\dot{u}(0) - \\
&\quad - \cos(TA^{1/2})(A^{-1}F_1(0) + RG(0)) + A^{-1}F_1(0) + RG(0) + \\
&\quad + \int_0^T (id - \cos((T-t)A^{1/2})) \left(A^{-1}F_1^{(1)}(t) + RG^{(1)}(t) \right) dt + \\
&\quad + \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2})A^{-1/2}F_2(t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(14) \quad \dot{u}(T) &= -\sin(TA^{1/2})A^{1/2}u(0) + \cos(TA^{1/2})\dot{u}(0) + \\
&\quad + \sin(TA^{1/2}) \left(A^{-1/2}F_1(0) + A^{1/2}RG(0) \right) + \\
&\quad + \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2}) \left(A^{-1/2}F_1^{(1)}(t) + A^{1/2}RG^{(1)}(t) \right) dt + \\
&\quad + \int_0^T \cos((T-t)A^{1/2})F_2(t)dt
\end{aligned}$$

Unter den obigen Voraussetzungen nennen wir jede Lösung von (13) und (14) mit

$$u \in C^0(J, W_B^{1/2}) \cap C^1(J, W)$$

eine milde Lösung von (P0) auf dem Intervall J .

Proposition 2

Jede milde Lösung von (P0) ist auch eine schwache Lösung.

Beweis

Für jedes $T \in J$ definieren wir

$$\begin{aligned}
w(T) &:= \sin(TA^{1/2})A^{-1/2}u(0) - \cos(TA^{1/2})A^{-1}\dot{u}(0) - \\
&\quad - \sin(TA^{1/2}) \left(A^{-3/2}F_1(0) + A^{-1/2}RG(0) \right) + \\
&\quad + \int_0^T A^{-1}(F_1(t) + F_2(t)) + RG(t) dt - \\
&\quad - \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2}) \left(A^{-3/2}F_1^{(1)}(t) + A^{-1/2}RG^{(1)}(t) \right) dt - \\
&\quad - \int_0^T \cos((T-t)A^{1/2})A^{-1}F_2(t)dt
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$w \in C^1(J, W_B^{1/2}), \quad \dot{w}(t) = u(t), \quad w(0) = -A^{-1}\dot{u}(0) \quad .$$

Nun wählen wir ein beliebiges

$$\varphi \in C^1(J, W_B^{1/2})$$

und verwenden

$$a(\dot{\varphi}(t), RG(t)) = \langle C\dot{\varphi}(t), G(t) \rangle_\theta \quad .$$

Aus dem Obigen und (14) erhält man durch elementare Rechnung

$$\begin{aligned} \langle \dot{\varphi}(t), \dot{u}(t) \rangle + a(\dot{\varphi}(t), w(t)) &= \\ = \langle C\dot{\varphi}(t), \int_0^t G(\tau) d\tau \rangle_\theta + \langle \dot{\varphi}(t), \int_0^t F_1(\tau) + F_2(\tau) d\tau \rangle & \quad . \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung über das Intervall $(0, T)$ und formen anschliessend durch partielle Integration um, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \varphi(T), \dot{u}(T) \rangle - \langle \varphi(0), \dot{u}(0) \rangle - \int_0^T \langle \dot{\varphi}(t), \dot{u}(t) \rangle dt &= \\ = \int_0^T -a(\varphi(t), u(t)) + \langle \varphi(t), F_1(t) + F_2(t) \rangle + \langle C\varphi(t), G(t) \rangle_\theta dt & \quad \end{aligned}$$

für beliebiges $T \in J$. Wegen $W_B^{1/2} \hookrightarrow W$ gilt die obige Formel auch für

$$\varphi \in C^0(J, W_B^{1/2}) \cap C^1(J, W)$$

d.h. u ist eine schwache Lösung von (P0).

[]

Bisher haben wir inhomogene Terme betrachtet, die nur von der Zeit t abhängen. Der wesentlich interessantere Fall ist natürlich $F = F(u)$ und $G = G(u)$, d.h. wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} (P1) \quad \ddot{u}(t) + Au(t) &= F_1(u(t)) + F_2(u(t), \dot{u}(t)) \\ Bu(t) &= G(u(t)) \quad . \end{aligned}$$

Wir können die zu (13)(14) analogen Gleichungen aufstellen und erhalten die Integralgleichungen

$$\begin{aligned}
 (M1) \quad u(T) = & \cos(TA^{1/2})u(0) + \sin(TA^{1/2})A^{-1/2}\dot{u}(0) - \\
 & + (id - \cos(TA^{1/2}))(A^{-1}F_1(u(0)) + RG(u(0))) + \\
 & + \int_0^T (id - \cos((T-t)A^{1/2})) \\
 & \quad \left(A^{-1}F_1^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) + RG^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) \right) dt + \\
 & + \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2})A^{-1/2}F_2(u(t), \dot{u}(t)) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (M2) \quad \dot{u}(T) = & -\sin(TA^{1/2})A^{1/2}u(0) + \cos(TA^{1/2})\dot{u}(0) + \\
 & + \sin(TA^{1/2}) \left(A^{-1/2}F_1(u(0)) + A^{1/2}RG(u(0)) \right) + \\
 & + \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2}) \\
 & \quad \left(A^{-1/2}F_1^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) + A^{1/2}RG^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) \right) dt + \\
 & + \int_0^T \cos((T-t)A^{1/2})F_2(u(t), \dot{u}(t))dt
 \end{aligned}$$

Wir nennen nun u eine milde α -Lösung von (P1), falls die Integralgleichungen (M1) und (M2) durch $(u, \dot{u})$ gelöst werden in $C^0(J, W_B^\alpha) \times C^0(J, W_B^{\alpha-1/2})$ mit

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & u \in C^0(J, W_B^\alpha) \cap C^1(J, W_B^{\alpha-1/2}) \\
 & F_1(u(\cdot)) \in C^1(J, W_B^{\alpha-1}) \quad RG(u(\cdot)) \in C^1(J, W_B^\alpha) \\
 & F_2(u(\cdot), \dot{u}(\cdot)) \in C^0(J, W_B^{\alpha-1/2}) \\
 & \frac{d}{dt}F_1(u(t)) = F_1^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) \\
 & \frac{d}{dt}RG(u(t)) = RG^{(1)}(u(t), \dot{u}(t))
 \end{aligned}$$

Theorem 3

Sei J ein offenes Intervall, das 0 enthält. Es gelte

$$u \in C^0(J, W_B^{-1/2}) \cap C^1(J, W)$$

und für die Nichtlinearitäten seien die folgenden Stetigkeitseigenschaften erfüllt:

$$F_1(u(\cdot)) \in C^1(J, W_B^{-1/2}) \quad G(u(\cdot)) \in C^1(J, \partial_0 W^0)$$

$$F_2(u(\cdot), \dot{u}(\cdot)) \in C^0(J, W)$$

$$\frac{d}{dt} F_1(u(t)) = F_1^{(1)}(u(t), \dot{u}(t))$$

$$\frac{d}{dt} RG(u(t)) = RG^{(1)}(u(t), \dot{u}(t))$$

Unter diesen Voraussetzungen ist u genau dann eine milde $\frac{1}{2}$ -Lösung von (P1), wenn u eine schwache Lösung von (P1) ist.

Bemerkung

Sind zusätzlich noch die Regularitätsvoraussetzungen (15) an die Nichtlinearitäten erfüllt, so ist u eine milde α -Lösung. Diese Tatsache kann eventuell verwendet werden, um die Regularität von Lösungen zu verbessern. Ist z.B. u eine schwache Lösung, so ist es auch eine milde $\frac{1}{2}$ -Lösung. Kann man nun die Bedingungen (15) für F und G verifizieren für ein $\alpha > 1/2$, so ist u auch eine milde α -Lösung und man hat die Regularität von u verbessert. Diese "Methode" scheint aber nicht sehr wirkungsvoll zu sein und verwendet die Integralgleichungen (M1)(M2) sicher nicht optimal.

Beweis

Proposition 2 zeigt, dass eine milde Lösung auch eine schwache ist. Wegen Proposition 1 löst eine schwache Lösung die Integralgleichung (12). Die Voraussetzungen an die Nichtlinearitäten implizieren, dass die formalen Schritte, die von (12) auf (13)(14) geführt haben, korrekt sind. Somit lösen (u, u) die Integralgleichungen (M1)(M2) und wir haben die Behauptung des Theorems bewiesen. Die Aussage der Bemerkung lässt sich leicht verifizieren, indem man (M1)(M2) betrachtet.

[]

Der folgende abstrakte Existenz- und Eindeigkeitssatz ist für diese Arbeit zentral. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, dass die Voraussetzungen erfüllt sind bei konkreten Anfangs-Randwertproblemen vom Typ der Wellengleichung mit nichtlinearen Randbedingungen.

Theorem 4

Sei $0 \leq \alpha < 1$ fest gewählt und F_1 , $F_1^{(1)}$, F_2 , G und $G^{(1)}$ seien Abbildungen mit

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &\in C^{1-\alpha}(W_B^\alpha \times W_B^{\alpha-1/2}, W_B^{\alpha-1}) \\ F_2 &\in C^{1-\alpha}(W_B^\alpha \times W_B^{\alpha-1/2}, W_B^{\alpha-1/2}) \\ G^{(1)} &\in C^{1-\alpha}(W_B^\alpha \times W_B^{\alpha-1/2}, \partial_0 W^{2\alpha-1}) \end{aligned}$$

wo $\partial_0 W^{2\alpha-1}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\partial W^{2\alpha-1}$ ist mit

$$(16) \quad R(\partial_0 W^{2\alpha-1}) \subset W_B^\alpha.$$

$F_1^{(1)}$, F_2 und $G^{(1)}$ seien beschränkt auf beschränkten Mengen und falls

$$u \in C^0(\mathbb{R}, W_B^\alpha) \cap C^1(\mathbb{R}, W_B^{\alpha-1/2}) \quad ,$$

so gelte

$$\begin{aligned} F_1(u(\cdot)) &\in C^1(\mathbb{R}, W_B^{\alpha-1}) \\ G(u(\cdot)) &\in C^1(\mathbb{R}, \partial_0 W^{2\alpha-1}) \end{aligned}$$

mit den Ableitungen aus Formel (15).

Unter den obigen Voraussetzungen existiert für jedes Paar

$$(u_0, \dot{u}_0) \in W_B^\alpha \times W_B^{\alpha-1/2}$$

von Anfangswerten ein offenes Intervall $J := (T^-, T^+)$, das 0 enthält, und eine eindeutige milde α -Lösung u von (P1) mit

$$u(0) = u_0 \quad , \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad .$$

Gibt es eine Funktion $k(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ mit

$$\|u(t)\|_{W_B^\alpha} + \|\dot{u}(t)\|_{W_B^{\alpha-1/2}} \leq k(t) \quad \forall t \in [0, T^+)$$

dann ist $T^+ = \infty$. Analoge Resultate gelten für T^- .

Beweis

Durch Banachiteration und die üblichen Fortsetzungsargumente erhalten wir das Intervall J und eindeutige Lösungen

$$(u, v) \in C^0(J, W_B^\alpha \times W_B^{\alpha-1/2})$$

der Integralgleichungen (M1)(M2) mit

$$\lim_{t \rightarrow T^+} (\|u(t)\|_{W_B^\alpha} + \|v(t)\|_{W_B^{\alpha-1/2}}) = \infty$$

falls $T^+ < \infty$. Indem wir (M1) differenzieren, erhalten wir

$$\dot{u}(t) = v(t) \quad \text{und} \quad u \in C^1(J, W_B^{\alpha-1/2})$$

Die Voraussetzungen an F_1 und $F_1^{(1)}$ (bzw. G und $G^{(1)}$) ergeben nun, dass u eine milde Lösung von (P1) ist mit den behaupteten Eigenschaften.

□

Bemerkungen

A Ist im obigen Theorem $\alpha \geq 1/2$ und $\partial_0 W^{2\alpha-1} \hookrightarrow \partial_0 W^0$, so ist, gemäss Proposition 2, u auch eine schwache Lösung von (P1).

B Wir haben nur $0 \leq \alpha \leq 1$ betrachtet, da wir den Operator R nur für diese Werte definiert haben. Konstruiert man R auch für andere Werte von α , so lässt sich Theorem 3 problemlos übertragen.

C In den Anwendungen ist α gross zu wählen, damit die erhaltenen Lösungen möglichst regulär sind. Der folgende Abschnitt wird zeigen, dass bei Gleichungen vom Typ der Wellengleichung der optimale Fall durch die Bedingung (16) bestimmt wird.

3. Aufgabs Randwertprobleme vom Typ der Wellengleichung

In diesem Abschnitt wenden wir die Resultate aus Abschnitt 2 an auf Differentialoperatoren der Ordnung $2m$. Anschliessend betrachten wir den Fall $m = 2$ und geben Wachstumsbedingungen an für Funktionen f und g , so dass die entsprechenden Neumannoperatoren F und G den abstrakten Voraussetzungen genügen. Anschliessend geben wir ein Kriterium an für die globale Existenz der Lösung und untersuchen das Abfallverhalten für gedämpfte Gleichungen.

Sei Ω ein beschränktes, glattes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit Rand Γ . Wir betrachten reguläre elliptische Randwertprobleme (A, B) im Sinne von Lions, Magenes [16] Kapitel 2.1, d.h.

$\text{ord } A = 2m$, A gleichmässig stark elliptisch

$$B = (B_1, \dots, B_m)$$

$\text{ord } B_j = m_j$ mit $j < i \Rightarrow m_j < m_i < 2m$.

Die Randoperatoren B_j , $j = 1, \dots, m$ seien organisiert in einem Dirichletsystem der Ordnung $2m$ durch

$$C = (C_1, \dots, C_m)$$

$\text{ord } C_j = 2m - 1 - m_j$, $j = 1, \dots, m$

Berechnen wir mit $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma)}$ (bzw. $(\cdot, \cdot)_{L^2(\bar{\Omega})}$) das übliche Skalarprodukt auf $L^2(\Gamma)$ (bzw. $L^2(\bar{\Omega})$), so gelte die Green'sche Formel

$$(1) \quad \langle Au, v \rangle + \langle Bu, C^*v \rangle_{\mathcal{D}} = \langle u, Ar \rangle + \langle C^*u, Br \rangle_{\mathcal{D}} \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),$$

wo

$$\langle Bu, C^*v \rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{j=1}^m \langle B_j u, C_j^* v \rangle_{\mathcal{D}}$$

Nun spalten wir B auf in Terme der Ordnung recht kleiner m und solche hoher Ordnung, d.h.

$$B = (B_L, B_H), \quad m_L = m$$

$$B_L = (B_1, \dots, B_{j-1}), \quad B_H = (B_j, \dots, B_m),$$

$$C_L = (C_1, \dots, C_{j-1}), \quad C_H = (C_j, \dots, C_m).$$

Nun strecken wir eine Randbeugung B_j $j < j$ auf die j -Umgebung des Randes und betrachten nur noch das "reduzierte" elliptische Problem

$$(1) \quad (B_L, C_L)$$

Um die Resultate aus Abschnitt 2 anwenden zu können, müssen wir die abstrakten Räume geeignet wählen :

$$\begin{aligned} W &:= L^2, \quad \partial W := L^2(\Gamma) \\ W^1 &:= H_{B_L}^{2m} = H^{2m} \cap \{u \in H^{2m} | B_L u = 0\} \\ \overset{\circ}{W}^1 &:= H_0^{2m} = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} H^{2m} \\ \partial W^1 &:= \prod_{j=\bar{j}}^m H^{2m-1/2-m_j}(\Gamma) \\ \partial W_1^1 &:= \prod_{j=\bar{j}}^m H^{1/2+m_j}(\Gamma) \quad . \end{aligned}$$

Aus den obigen Definitionen folgt

$$W_B^1 = H_B^{2m} \quad ,$$

wobei H_B^{2m} analog zu $H_{B_L}^{2m}$ definiert ist. Verlangen wir nun, dass ein $a_0 > 0$ existiert mit

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq a_0 \|u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in W_B^1 \quad ,$$

so ist in Lions, Magenes [16] gezeigt, dass die Voraussetzungen (A1)-(A4) erfüllt sind für die Operatoren $(\mathcal{A}, B_H, C_H)$.

Sei $0 < \alpha < 1$ mit $2m\alpha + 1/2 \notin \mathbb{N}$ und wir definieren

$$H_{\{B\}}^{2m\alpha} := \{u \in H^{2m\alpha} | B_j u = 0 \text{ falls } m_j < 2m\alpha - 1/2\} \quad .$$

Grisvard [10] hat gezeigt, dass

$$\begin{aligned} W_B^\alpha &= \left[L^2, H_B^{2m} \right]_\alpha = H_{\{B\}}^{2m\alpha} \quad , \\ W^\alpha &= \left[L^2, H_{B_L}^{2m} \right]_\alpha = H_{\{B_L\}}^{2m\alpha} \quad . \end{aligned}$$

Wegen $W_B^{-\alpha} = (W_B^\alpha)'$ schreiben wir

$$H_{\{B\}}^{2m\alpha} := (H_{\{B\}}^{2m\alpha})' \quad .$$

Wählen wir nun

$$\alpha < \alpha := \frac{\bar{m} + 1/2}{2m} \quad ,$$

dann gilt

$$W_B^\alpha = W^\alpha \quad .$$

Wegen

$$\partial W^{2\alpha-1} = \prod_{j=j}^m H^{2m\alpha-m_j-1/2}(\Gamma)$$

erhalten wir daraus

$$R \in \mathcal{L}(\partial W^{2\alpha-1}, W_B^\alpha) \quad .$$

Somit sind wir in der Lage, milde Lösungen des folgenden Problems zu konstruieren

$$(P2) \quad \begin{aligned} \ddot{u}(t) + \mathcal{A}u(t) &= F_1(u(t)) + F_2(u(t), \dot{u}(t)) \\ B_L u(t) &= 0 \\ B_H u(t) &= G(u(t)) \end{aligned} \quad .$$

Mit den obigen Identifikationen erhalten wir aus Theorem 2.4 direkt das folgende Theorem.

Theorem 1

Sei $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ fest gewählt und F_1 , $F_1^{(1)}$, F_2 , G und $G^{(1)}$ seien Abbildungen mit

$$(2) \quad \begin{aligned} F_1^{(1)} &\in C^{1-} \left(H_{\{B\}}^{2m\alpha} \times H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)}, H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1)} \right) \\ F_2 &\in C^{1-} \left(H_{\{B\}}^{2m\alpha} \times H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)}, H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)} \right) \\ G_j^{(1)} &\in C^{1-} \left(H_{\{B\}}^{2m\alpha} \times H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)}, H^{2m\alpha-m_j-1/2}(\Gamma) \right) \\ &\text{für } j \leq j \leq m \end{aligned} \quad .$$

$F_1^{(1)}$, F_2 und $G_j^{(1)}$ seien beschränkt auf beschränkten Mengen und falls

$$u \in C^0(\mathbb{R}, H_{\{B\}}^{2m\alpha}) \cap C^1(\mathbb{R}, H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)}) \quad ,$$

so gelte

$$(3) \quad \begin{aligned} F_1(u(\cdot)) &\in C^1 \left(\mathbb{R}, H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1)} \right) \\ G_j(u(\cdot)) &\in C^1 \left(\mathbb{R}, H^{2m\alpha-m_j-1/2}(\Gamma) \right) \end{aligned}$$

mit den Ableitungen

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} F_1(u(t)) &= F_1^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) \\ \frac{d}{dt} G_j(u(t)) &= G_j^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) \end{aligned}$$

Unter den obigen Voraussetzungen existiert für jedes Paar

$$(u_0, \dot{u}_0) \in H_{\{B\}}^{2m\alpha} \times H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)}$$

von Anfangswerten ein offenes Intervall $J := (T^-, T^+)$, das 0 enthält, und eine eindeutige milde α -Lösung u von (P2) mit

$$\begin{aligned} u &\in C^0(J, H_{\{B\}}^{2m\alpha}) \cap C^1(J, H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)}) \\ u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{aligned}$$

Gibt es eine Funktion $k(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ mit

$$\|u(t)\|_{H_{\{B\}}^{2m\alpha}} + \|\dot{u}(t)\|_{H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)}} \leq k(t) \quad \forall t \in [0, T^+)$$

dann ist $T^+ = \infty$. Analoge Resultate gelten für T^- .

Bemerkungen

A Wir wollen untersuchen, unter welchen Zusatzvoraussetzungen die obige, milde Lösung auch eine schwache Lösung ist. Verlangen wir im Theorem zusätzlich $\alpha \geq 1/2$, so gilt

$$C_H \in \mathcal{L}(H_{\{B\}}^{2m\alpha}, \prod_{i=1}^m H^{1/2+m_i-2m(1-\alpha)}(\Gamma))$$

Hat das elliptische Problem nun eine zugeordnete Bilinearform a (sie kann oft durch partielle Integration gefunden werden (vgl. Lions, Magenes [16] 2.2.4)) mit

$$a \in \mathcal{L}^2(H_{\{B\}}^m \times H_{\{B\}}^m, \mathbb{R})$$

und gilt für a die Greensche Formel

$$a(\varphi, u) := \langle \varphi, Au \rangle + \langle C_H \varphi, B_H u \rangle_B \quad \forall \varphi \in H_{\{B\}}^m, u \in H_{B_L}^{2m},$$

dann ist mit

$$\partial_0 W^0 := \partial W^{2\alpha-1} \hookrightarrow \partial W^0$$

die Voraussetzung (A5) erfüllt. Dabei ist $\langle C_H \varphi, B_H u \rangle_B$ analog zu $\langle C \varphi, Bu \rangle_B$ definiert. Aufgrund von Proposition 2.2 ist u auch eine schwache Lösung von (P2).

B Die Voraussetzungen (2) an die Nichtlinearitäten sind sehr allgemein und beinhalten z.B. auch Störungsergebnisse wie sie in Goldstein [9] Theorem II.7.8 angegeben sind. Setzen wir

$$F_2(u) := Pu$$

wo P ein Differentialoperator der Ordnung m ist, so gilt

$$F_2 \in \mathcal{L}(H^{2m\alpha}, H^{2m(\alpha-1/2)})$$

und die Voraussetzung (2) an F_2 ist erfüllt, falls

$$H^{2m(\alpha-1/2)} = H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)}$$

oder F_2 entsprechende Randbedingungen erfüllt.

Probleme vierter Ordnung

Nun wollen wir die vorangehenden Resultate anwenden auf Probleme vierter Ordnung und untersuchen, welche konkreten Voraussetzungen wir an die nichtlinearen Terme stellen müssen, damit wir eine Lösung bekommen. Seien also für die Operatoren (A, B_1, B_2, C_1, C_2) die Voraussetzungen (A1)-(A5) erfüllt und

$$\text{ord } A = 4 \quad ,$$

$$\text{ord } B_1 \in \{1, 2\} \quad , \quad \text{ord } B_2 = 3 \quad .$$

Somit hat C_2 die Ordnung 0 und wir können oBdA. für C_2 den Spuroperator wählen (modifiziere B_2 so, dass die Greensche Formel gilt). Für gegebene differenzierbare Abbildungen f und g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und eine reelle Zahl k suchen wir Lösungen des Problems

$$\begin{aligned} (P3) \quad & \ddot{u}(x, t) + Au(x, t) = f(u(x, t)) - 2k\dot{u}(x, t) && \text{in } \Omega \times J \\ & B_1 u(x, t) = 0 && \text{auf } \Gamma \times J \\ & B_2 u(x, t) = g(u(x, t)) && \text{auf } \Gamma \times J \end{aligned}$$

Für ein festes $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$\alpha := \frac{3 + 1/2 - \varepsilon}{4} < \bar{\alpha} = \frac{3 + 1/2}{4} \quad .$$

Wir werden es uns mit kleinen Zahlen $n \leq 10$ begnügen. Mit $F = F^0$ (bzw. G^0) bezeichnen wir die Isotriplettstruktur von $f = D_f^0$ (bzw. D_g^0). Mit tr bezeichnen wir den üblichen Spuroperator, der einer Matrix m auf dem Gebiet Ω ihre Einschränkung auf den Rand Γ zuordnet. Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} F_1(u) &:= F(u) \\ F_1^{(1)}(u, \dot{u}) &:= F^1(u) \dot{u} \\ G_1^{(1)}(u, \dot{u}) &:= \text{tr} \left(G^1(u) m \right) \\ F_2(u, u) &:= -2ku \end{aligned}$$

sind wir gelangt zu Problem (1). Theorem 1 wird nun nur noch untersucht, unter welchen Bedingungen die Identifizierbarkeit der Voraussetzungen von Theorem 1 erfüllt.

Lemma 2

Sei $n \leq 10$, f erfülle die Voraussetzung

$$f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und falls $n \leq 7$, so gelte zusätzlich

$$\begin{aligned} |D^2 f(s)| &\leq a(1 + |s|^{7-2}) \\ \text{mit } \gamma &\leq \frac{4}{n} + 1 \end{aligned}$$

Dann gilt für $\varepsilon > 0$ genügend klein (d.h. $\gamma < \frac{4}{7+\varepsilon} + 1$, falls $n \leq 7$)

$$F_1^{(1)} \in C^1 \left(H^{7/2-\varepsilon} \times H^{3/2-\varepsilon}, H^{-1/2-\varepsilon} \right)$$

und $F_1^{(1)}$ ist beschränkt auf beschränkten Mengen.

Falls

$$f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad f(s) = 0 \quad \text{für} \quad |s| \leq 1$$

so ist

$$\begin{aligned} F(u(\cdot)) &\in C^1(\mathbb{R}, H^{-1/2-\varepsilon}) \quad \text{mit} \\ \frac{d}{dt} F(u(t)) &= F^1(u(t)) \dot{u}(t) = F_1^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)) \end{aligned}$$

Beweis

Mit $\circ$ bezeichnen wir die Multiplikation von Funktionen. Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^{7/2-\varepsilon} \hookrightarrow E_1 \xrightarrow{F'} E_4 \\ \dot{u} \in H^{3/2-\varepsilon} \hookrightarrow E_2 \xrightarrow{\text{id}} E_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\circ} E_3 \hookrightarrow H^{-1/2-\varepsilon}$$

Lemma A6 zeigt, dass alle Einbettungen stetig sind, falls wir die Räume E_j wie folgt wählen :

$$E_1 := \begin{cases} C^0(\bar{\Omega}) & \text{für } n \leq 6 \\ L^{q_2} & \frac{1}{q_2} = \frac{n-7+2\varepsilon}{2n} \text{ für } n \geq 7 \end{cases}$$

$$E_2 := \begin{cases} C^0(\bar{\Omega}) & \text{für } n = 1, 2 \\ L^{q_0} & \frac{1}{q_0} = \frac{n-3+2\varepsilon}{2n} \text{ für } n \geq 3 \end{cases}$$

$$E_3 := L^{p_0} \quad \text{wobei} \quad \begin{cases} \frac{1}{p_0} < 1 & \text{für } n = 1 \\ \frac{1}{p_0} = \frac{n+1+2\varepsilon}{2n} & \text{für } n \geq 2 \end{cases}.$$

Gemäss Lemma (A1) ist die Multiplikation stetig von $E_4 \times E_2$ nach E_3 , falls wir

$$E_4 := \begin{cases} C^0(\bar{\Omega}) & \text{für } n = 1, 2 \\ L^p & \frac{1}{p} = \frac{4}{2n} = \frac{1}{p_0} \quad \frac{1}{q_0} \text{ für } n \geq 3 \end{cases}$$

wählen. Es bleibt zu zeigen, dass

$$F' \in C^1(E_1, E_4) \quad .$$

Für $7 \leq n \leq 10$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{q_2}{p} &= \frac{2n}{n-7+2\varepsilon} \frac{4}{2n} > \gamma - 1 \\ \frac{1}{q_2} &= \frac{n-7+2\varepsilon}{2n} < \frac{4}{2n} = \frac{1}{p} \quad , \end{aligned}$$

und somit erhalten wir aus Lemma A3 (β) die verlangte Eigenschaft von F' . Ist $n \leq 6$ so erhalten wir dasselbe mit Lemma A3 (α). Aus den Lipschitzabschätzungen in Lemma 3 des Anhangs folgt

$$\begin{aligned} & \|F_1^{(1)}(u_1, v_1) - F_1^{(1)}(u_0, v_0)\|_{E_3} \\ & \leq c(\|F'(u_1) - F'(u_0)\|_{E_4} \|v_1\|_{E_2} + \|F'(u_0)\|_{E_4} \|v_1 - v_0\|_{E_2}) \\ & \leq c(M, f)(\|u_1 - u_0\|_{E_1} + \|v_1 - v_0\|_{E_2}) \\ & \quad \forall \|u_j\|_{E_1} \leq M, \quad \|v_j\|_{E_2} \leq M \quad , \quad j = 0, 1 \quad . \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit der Konstante c von M und f kann in Lemma A3 abgelesen werden. Damit haben wir die Lipschitzstetigkeit von $F_1^{(1)}$ gezeigt. Die Beschränktheit ist eine direkte Konsequenz davon, indem wir $v_0 = u_0 = 0$ setzen.

Die Formel für die Ableitung von $F(u(\cdot))$ folgt aus den Lemmata 3 und 5 des Anhangs.

□

Im obigen Beweis haben wir für $n > 7$ das Lemma A3 (β) verwendet. Dazu benötigten wir die Bedingung $\frac{1}{q_2} < \frac{1}{p}$, die nur erfüllt ist, falls $n \leq 10$. Das ist der Grund für die obere Schranke an die Dimension n .

Lemma 3

Sei $n \leq 7$, g erfülle die Voraussetzung

$$g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und falls $n = 7$, so gelte zusätzlich

$$|D^3 g(s)| \leq a(1 + |s|^\gamma) \quad \text{für ein } \gamma < \infty.$$

Dann gilt für $0 < \varepsilon < \frac{1}{1+\gamma}$

$$G^{(1)} \in C^1 \left(H^{7/2-\varepsilon} \times H^{3/2-\varepsilon}, L^2(\Gamma) \right)$$

und $G^{(1)}$ ist beschränkt auf beschränkten Mengen.

Falls

$$u \in C^0(\mathbb{R}, H^{7/2-\varepsilon}) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{3/2-\varepsilon}),$$

so ist

$$\text{tr } G(u(\cdot)) \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\Gamma)) \quad \text{mit}$$

$$\frac{d}{dt} \text{tr } G(u(t)) = \text{tr } (G'(u(t))\dot{u}(t)) = G^{(1)}(u(t), \dot{u}(t)).$$

Beweis

Wir gehen analog zum Beweis von Lemma 2 vor und betrachten das Diagramm

$$\left. \begin{array}{l} u \in H^{7/2-\varepsilon} \hookrightarrow E_1 \xrightarrow{G'} E_4 \\ \tilde{u} \in H^{3/2-\varepsilon} \hookrightarrow E_2 \xrightarrow{id} E_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\circ} E_3 \hookrightarrow H^{1/2+\varepsilon'} \xrightarrow{\text{tr}} L^2(\Gamma) \quad .$$

Lemma A6 zeigt, dass alle Einbettungen stetig sind, falls wir die Räume E_j wie folgt wählen:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \begin{cases} C^1(\bar{\Omega}) & \text{für } n \leq 4 \\ W^{1,q_3} & \text{für } n \geq 5 \end{cases} \quad \frac{1}{q_3} = \frac{n-5+2\varepsilon}{2n} \\ E_2 &:= W^{1,q_1} \quad \frac{1}{q_1} = \frac{n-1+2\varepsilon}{2n} \quad \text{für } n \geq 1 \\ E_3 &:= W^{1,p_1} \quad \frac{1}{p_1} = \frac{n+1-2\varepsilon'}{2n} \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned} \quad .$$

Dabei wählen wir $\varepsilon' > 0$ so, dass

$$\varepsilon < \frac{1-\varepsilon'}{1+\gamma} \quad .$$

Gemäss Lemma (A1) ist die Multiplikation stetig von $E_4 \times E_2$ nach E_3 , falls wir

$$E_4 := \begin{cases} C^1(\bar{\Omega}) & \text{für } n = 1, 2 \\ W^{1,p} & \frac{1}{p} = \frac{2-(\varepsilon+\varepsilon')}{n} \quad \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

wählen. Da der Spuoperator tr stetig ist von $H^{1/2+\varepsilon'}$ nach $L^2(\Gamma)$ (Adams [1]), müssen wir noch zeigen, dass

$$G' \in C^1(E_1, E_4) \quad .$$

Für $n \leq 6$ verwenden wir Lemma A4 (α) und für $n = 7$ gilt

$$\left(\frac{n}{p} - 1\right) / \left(\frac{n}{q_3} - 1\right) = \frac{1 - (\varepsilon + \varepsilon')}{\varepsilon} > \gamma \quad .$$

Somit folgt die Differenzierbarkeit von $G^{(1)}$ aus Lemma A4 (β). Die in Lemma A4 notwendige Bedingung $\frac{1}{q_3} < \frac{1}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{n})$ ist nur erfüllt falls $n \leq 7$.

Durch eine zum Beweis von Lemma 2 analoge Betrachtung erhalten wir die Lipschitzstetigkeit von $G^{(1)}$ und die Differenzierbarkeitsaussagen.

□

Theorem 1 und die obigen Lemmata ergeben nun das folgende Resultat.

Theorem 4

Sei $n < 7$ und

$$f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und im Falle von $n = 7$ seien $D^2 f$ und $D^3 g$ polynomial beschränkt. Dann gibt es für genügend kleines $\epsilon > 0$ zu jedem Anfangswert

$$u_0 \in H_{\{B_1\}}^{7/2-\epsilon}, \quad \dot{u}_0 \in H^{3/2-\epsilon}$$

ein maximales Intervall $J = (T^-, T^+)$ und eine eindeutige milde Lösung u von (P3) mit

$$u \in C^0(J, H_{\{B_1\}}^{7/2-\epsilon}) \cap C^1(J, H^{3/2-\epsilon})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

Ist für eine Funktion $k(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(5) \quad \|u(t)\|_{H^{7/2-\epsilon}} \leq k(t) \quad \forall t \in [0, T^+)$$

so ist $T^+ = \infty$. Ein analoges Resultat gilt für T^- . Die milde Lösung u ist auch eine schwache Lösung von (P3).

Beweis

Mit unserer Wahl von α gilt

$$H_{\{B\}}^{2m\alpha} = H_{\{B_1\}}^{7/2-\epsilon}, \quad H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1/2)} = H^{3/2-\epsilon},$$

$$H_{\{B\}}^{2m(\alpha-1)} = H^{-1/2-\epsilon}, \quad L^2(\Gamma) \hookrightarrow H^{2m\alpha-3-1/2}(\Gamma) = H^{-\epsilon}(\Gamma),$$

und offensichtlich ist

$$F_2 \in C^1\left(H^{7/2-\epsilon} \times H^{3/2-\epsilon}, H^{3/2-\epsilon}\right).$$

Somit müssen wir nur noch zeigen, dass wegen (5) auch $\|\dot{u}\|_{H^{3/2-\epsilon}}$ beschränkt ist. Dann folgt das Resultat aus den obigen Lemmata und Theorem 1. Benutzen wir die spezielle Gestalt der Nichtlinearitäten, so sieht man, dass in (M2) die Funktion $\dot{u}$ nur als affines Argument unter dem Integral erscheint. Deshalb können wir die Gronwallsche Ungleichung verwenden. Setzen wir (5) in den Lemmata 2 und 3 ein, so erhalten wir

$$\|F_1^{(1)}(u(t), \dot{u}(t))\|_{(H^{1/2+\epsilon})'} \leq k_1(t) \|u(t)\|_{H^{3/2-\epsilon}}$$

$$\|G^{(1)}(u(t), \dot{u}(t))\|_{(H^\epsilon(\Gamma))'} \leq k_1(t) \|\dot{u}(t)\|_{H^{3/2-\epsilon}}$$

für eine geeignete Funktion k_1 . Mit diesen Ungleichungen folgt aus (M2)

$$\|\dot{u}(T)\|_{H^{3/2-\varepsilon}} \leq c + \int_0^T k_1(t) \|\dot{u}(t)\|_{H^{3/2-\varepsilon}} dt.$$

Somit finden wir eine a-priori Schranke für $\|\dot{u}(t)\|_{H^{3/2-\varepsilon}}$ und haben das Theorem bewiesen. □

Bemerkung

In [14] haben Levine und Smith die Gleichung

$$(5') \quad \begin{aligned} \ddot{u} + \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \times J \\ Bu &= g(u) && \text{auf } \Gamma \times J \end{aligned}$$

betrachtet, wobei B die Ableitung nach der äusseren Normalen ist. Sie verlangen, dass g gewisse Strukturbedingungen erfüllt und finden für Anfangswerte mit kleiner Energie globale, schwache Lösungen der obigen Wellengleichung mit

$$u(t) \in H^1 \quad \dot{u}(t) \in L^2.$$

Sie beweisen ihr Resultat mit Hilfe einer Approximation durch geeignete Eigenfunktionen und verwenden als wesentliches Hilfsmittel Strukturbedingungen an g und die zugehörige Energiegleichung. Deshalb liefert ihre Methode eine Lösung im Raume, dessen Norm durch die Energieabschätzung kontrolliert wird.

Leider können wir das Problem (5') mit unserer Methode nicht behandeln. Wir müssten im Verlaufe der Konstruktion die Spur (Restriktion auf den Rand Γ) des Ausdrucks $G^{(1)}(u)\dot{u}$ bilden. Das ist aber nicht möglich, da $\dot{u}$ im besten Fall in $H^{1/2-\varepsilon}$ liegt (bei unserer Konstruktion). Ist aber G kein Substitutionsoperator oder betrachten wir Probleme vierter oder höherer Ordnung, so kann unsere Methode wesentlich regulärere Lösungen liefern (z.B. $u \in H^{7/2-\varepsilon}$ in unserem Theorem 4). Wir erhalten lokale Lösungen für Anfangswerte mit beliebiger Energie und benötigen keine Strukturbedingungen. Erfüllt g ähnliche Strukturbedingungen wie in [14], so erhalten auch wir globale Lösungen (vgl. Theorem 5).

Die Arbeit von Levine, Smith und die vorliegende sind in einem gewissen Sinne komplementär. Für Probleme zweiter Ordnung (z.B. (5')) ist es sicher angebracht [14] zu verwenden. Für Probleme höherer Ordnung oder mit nichtlokalen Nichtlinearitäten ist unsere Methode leistungsfähiger.

Nun wollen wir die in Theorem 4 erhaltene Lösung untersuchen und zeigen, dass sie global ist unter zusätzlichen Wachstums- und Strukturbedingungen. Dazu müssen wir verwenden, dass u auch eine schwache Lösung ist (Theorem 1.3). Somit gilt

$$\begin{aligned} & \langle \varphi(T), \dot{u}(T) \rangle - \langle \varphi(0), \dot{u}(0) \rangle = \\ &= \int_0^T \langle \dot{\varphi}(t), \dot{u}(t) \rangle - a(\varphi(t), u(t)) \, dt \\ &+ \int_0^T \langle \varphi(t), F_1(u(t)) - 2k\dot{u}(t) \rangle + \langle \varphi(t), G(u(t)) \rangle_{\theta} \, dt \\ &\quad \forall \varphi \in C^0(J, H_{\{B\}}^2) \cap C^1(J, L^2) \quad \text{und } \forall T \in J \quad . \end{aligned}$$

Wählen wir $\varphi(t) := u(t)$, so erhalten wir aus der obigen Formel

$$\begin{aligned} & \langle u(T), \dot{u}(T) \rangle - \langle u(0), \dot{u}(0) \rangle = \\ (6) \quad &= \int_0^T \|\dot{u}(t)\|_{L^2}^2 - a(u(t), u(t)) \, dt \\ &+ \int_0^T \langle u(t), F_1(u(t)) - 2k\dot{u}(t) \rangle + \langle u(t), G(t) \rangle_{\theta} \, dt \quad . \end{aligned}$$

Ebenso wollen wir $\varphi(t) := \dot{u}(t)$ setzen. Das ist aber nicht direkt möglich, und wir müssen $\dot{u}$ geeignet approximieren. Dazu setzen wir für $\varepsilon > 0$

$$\varphi_{\varepsilon}(t) := \frac{1}{2\varepsilon}(u(t+\varepsilon) - u(t-\varepsilon))$$

und sehen

$$\begin{aligned} & \varphi_{\varepsilon} \in C^0(J, H_{\{B\}}^2) \cap C^1(J, L^2) \\ & \varphi_{\varepsilon} \longrightarrow \dot{u} \quad \text{lokal gleichmässig bezüglich } t \text{ in } L^2 \text{ für } \varepsilon \longrightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

Durch leichte Rechnung überprüft man nun für $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^T a(\varphi_{\varepsilon}(t), u(t)) \, dt = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_{T-\varepsilon}^T a(u(t+\varepsilon), u(t)) \, dt - \int_{-\varepsilon}^0 a(u(t+\varepsilon), u(t)) \, dt \right) \\ &+ \frac{1}{2} a(u(T), u(T)) - \frac{1}{2} a(u(0), u(0)) \end{aligned}$$

und ebenso

$$\int_0^T \langle \dot{\varphi}_{\varepsilon}(t), \dot{u}(t) \rangle \, dt \longrightarrow \frac{1}{2} \|\dot{u}(T)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|\dot{u}(0)\|_{L^2}^2 \quad .$$

Wählen wir $\varphi := \varphi_\varepsilon$ und lassen ε gegen Null streben, so erhalten wir

$$(7) \quad \|\dot{u}(T)\|_{L^2}^2 + a(u(T), u(T)) - \|\dot{u}_0\|_{L^2}^2 - a(u_0, u_0) = \int_0^T 2 \langle \dot{u}(t), F_1(u(t)) \rangle + 2 \langle \dot{u}(t), G(u(t)) \rangle_{\theta} - 4k \|\dot{u}(t)\|_{L^2}^2 dt.$$

Um die Nichtlinearitäten in (6) und (7) behandeln zu können, müssen wir die zugehörigen Potentiale einführen. Dazu setzen wir

$$v_f(s) := - \int_0^s f(\tau) d\tau$$

$$v_g(s) := - \int_0^s g(\tau) d\tau$$

und

$$V_f(u) := \int_{\Omega} v_f(u(x)) dx$$

$$V_g(u) := \int_{\Gamma} v_g(u(x)) dx.$$

Für die Lösung u aus Theorem 4 gilt somit

$$V_f(u(T)) - V_f(u_0) = - \int_0^T \langle F_1(u(t)), \dot{u}(t) \rangle dt$$

$$V_g(u(T)) - V_g(u_0) = - \int_0^T \langle G(u(t)), \dot{u}(t) \rangle_{\theta} dt.$$

Setzen wir nun für alle $T \in J$

$$V(T) := V_f(u(T)) + V_g(u(T))$$

$$E_k(T) := \|\dot{u}(T)\|_{L^2}^2 + 2k \langle u(T), \dot{u}(T) \rangle + a(u(T), u(T))$$

und addieren das $2k$ -fache von (6) zu (7), so erhalten wir

$$(8) \quad E_k(T) + 2V(T) - E_k(0) - 2V(0) =$$

$$= -2k \int_0^T E_k(t) - \langle u(t), F_1(u(t)) \rangle - \langle u(t), G(u(t)) \rangle_{\theta} dt.$$

Diese Gleichung ist sehr hilfreich, um Energieungleichungen und das Abfallverhalten bei dämpfendem Term $k \geq 0$ zu behandeln.

Wir verwenden (8) zuerst um zu zeigen, dass die Lösung u der ungedämpften Gleichung (P3) (d.h. $k = 0$) global bezüglich der Zeit existiert.

Theorem 5

Es seien die Voraussetzungen von Theorem 4 erfüllt mit $k = 0$ und wir verlangen die Strukturbedingungen

$$(9) \quad v_f(s) \geq 0, \quad v_g(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad .$$

Dann gilt die Energieungleichung

$$(10) \quad E_0(T) \leq E_0(0) + 2V(0) \quad \forall T \in [0, T^+) \quad .$$

Nun verlangen wir zusätzlich $n \leq 5$ und eine Gårdingsche Ungleichung für a , d.h. es gibt positive Konstanten c_1, c_2 mit

$$(11) \quad a(u, u) + c_1 \|u\|_{L^2}^2 \geq c_2 \|u\|_{H^2}^2 \quad \forall u \in H_{\{B_1\}}^2 \quad .$$

Ist $n \geq 4$, so seien $|f|$ und $|Dg|$ polynomial beschränkt und im Falle von $n = 5$ gelten die Wachstumsbedingungen

$$(12) \quad |f(s)| \leq a(1 + |s|^4) \quad , \quad |Dg(s)| \leq a(1 + |s|) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

(für $n < 4$ benötigen wir keine Wachstumsbedingungen). Dann impliziert die Energieungleichung (10) die globale Existenz der Lösung (d.h. $T^+ = \infty$).

Beweis

Die Energieungleichung (10) ist eine direkte Konsequenz von (8) und (9), wobei zu beachten ist, dass $k = 0$. Wir erhalten sofort, dass $\dot{u}$ in der L^2 -Norm durch eine Konstante beschränkt ist. Somit gilt

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq c(1 + t) \quad \forall t \in [0, T^+) \quad .$$

Aus der Gårdingschen Ungleichung und (10) folgt, dass $\|u\|_{H^2}$ a-priori beschränkt ist, d.h. es existiert eine Funktion $k \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$\|u\|_{H^2} \leq k(t) \quad \forall t \in [0, T^+) \quad .$$

Somit müssen wir nur noch aus (12) eine a-priori Schranke für $\|u\|_{H^{7/2-\epsilon}}$ herleiten. Dazu verwenden wir die Integralgleichungen (M1), (M2) und das Lemma A2. In Analogie zum Beweis von Lemma 2 betrachten wir das Diagramm

$$\left. \begin{array}{lcl} u \in H^2 & \hookrightarrow & E_1 \xrightarrow{F'} E_4 \\ \dot{u} \in H^{3/2-\epsilon} & \hookrightarrow & E_2 \xrightarrow{\text{id}} E_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\circ} E_3 \hookrightarrow H^{-1/2-\epsilon},$$

wobei E_2, E_3, E_4 genau so wie in Lemma 2 gewählt sind und

$$E_1 := \begin{cases} C^0(\bar{\Omega}) & \text{für } n \leq 3 \\ L^{q_4} & \frac{1}{q_4} < 1/2 \text{ für } n = 4 \\ L^{q_4} & \frac{1}{q_4} = \frac{n-4}{2n} \text{ für } n = 5 \end{cases}.$$

Lemma (A2) zeigt, dass mit $\|u\|_{H^2}$ auch $\|F'(u)\|_{E_4}$ beschränkt ist.

Den Randterm G' behandeln wir ebenso, wobei wir E_2, E_3, E_4 wie in Lemma 3 wählen und

$$E_1 := \begin{cases} C^1(\bar{\Omega}) & \text{für } n = 1 \\ W^{1,q_5} & \frac{1}{q_5} < 1/2 \text{ für } n = 2 \\ W^{1,q_5} & \frac{1}{q_5} = \frac{n-2}{2n} \text{ für } n \geq 3 \end{cases}$$

setzen. Lemma (A2) zeigt, dass mit $\|u\|_{H^2}$ auch $\|G'(u)\|_{E_4}$ beschränkt ist. Wir betrachten die Integralgleichung (M2) in $C^0(\mathbb{R}, H^{3/2-\epsilon})$ und erhalten mit den obigen Resultaten

$$\|\dot{u}(T)\|_{H^{3/2-\epsilon}} \leq c + \int_0^T k_1(t) \|\dot{u}(t)\|_{H^{3/2-\epsilon}} dt.$$

Daraus folgt mit der Gronwallschen Ungleichung

$$\|\dot{u}(T)\|_{H^{3/2-\epsilon}} \leq k_2(T) \quad \forall T \in [0, T^+).$$

Vergleicht man die Terme unter dem Integral in (M1) und (M2), so liest man ab, dass

$$\|u(T)\|_{H^{7/2-\epsilon}} \leq k_2(T) \quad \forall T \in [0, T^+),$$

womit das Theorem bewiesen ist. □

Um die Gleichung (P3) mit Dämpfungsterm $k > 0$ zu behandeln, betrachten wir (8). Ist

$$(13) \quad 2v_f(s) \leq -sf(s), \quad 2v_g(s) \leq -sg(s) \quad \forall s \neq 0,$$

so folgt aus (8) und dem Lemma (A7)

$$E_k(T) \leq E_k(0)e^{-2kT} \quad \forall T \in [0, T^+).$$

Die Strukturbedingung (13) an f und g ist zu restriktiv. Wir ersetzen sie durch die folgende, allgemeinere Bedingung, die uns ein ähnliches Resultat liefert. Wir verlangen

$$(14) \quad sf(s) < 0, \quad sg(s) < 0 \quad \forall s \neq 0,$$

woraus offensichtlich $v_f(s) > 0$, $v_g(s) > 0$ für $s \neq 0$ und $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ folgt. Für $s \neq 0$ definieren wir die Funktionen

$$(15) \quad \lambda_f(s) := \frac{-sf(s)}{2v_f(s)}, \quad \lambda_g(s) := \frac{-sg(s)}{2v_g(s)}.$$

Eine einfache Rechnung mit der Regel von L'Hospital-Bernoulli zeigt, dass falls $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D^k f(0) = 0$ für alle $k < m$ und $D^m f(0) \neq 0$, dann gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \lambda_f(s) = \frac{m+1}{2}.$$

Deshalb definieren wir $\lambda_f(0) := 1$ und erhalten eine unterhalbstetige Funktion. Ein analoges Resultat gilt für g .

Satz 6

Es seien die Voraussetzungen von Theorem 4 erfüllt und k sei positiv. Haben wir eine Gårdingsche Ungleichung (11) und die Strukturbedingungen (14), und gibt es eine Zahl λ mit

$$(16) \quad \lambda \in [0, 1], \quad \lambda_f(s) \geq \lambda, \quad \lambda_g(s) \geq \lambda \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

dann gilt für die Lösung u aus Theorem 4

$$\|u(T)\|_{H^2} + \|\dot{u}(T)\|_{L^2} \leq c_0 e^{-\alpha T} \quad \forall T \in [0, T^+)$$

wobei α wie folgt gewählt ist

$$\alpha := \begin{cases} k\lambda & \text{falls } k^2 < a_0 \quad (\text{schwache Dämpfung}) \\ \min\{k\lambda, k - \sqrt{k^2 - a_0}\} & \text{falls } k^2 \geq a_0 \quad (\text{starke Dämpfung}) \end{cases}$$

Im Spezialfall von $\lambda = 1$ und $k^2 = a_0$ (kritische Dämpfung) ist die "Konstante" c_0 von der Zeit T abhängig und ist von der Form $c_0(T) = c(1 + T)$.

Bemerkungen

A Wie ein Vergleich mit den allgemeinen Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\ddot{u} + a_0 u = -2k\dot{u}$$

zeigt, ist der Abfallexponent α in Satz 6 optimal.

B Verwenden wir in Satz 6 zusätzlich die Wachstumsbedingungen (12), so zeigt der Beweis von Theorem 5, dass die Lösung u von (P3) global existiert ($T^+ = \infty$).

C Ist $n \leq 3$ so ist $T^+ = \infty$ (Bem. B) und H^2 ist stetig eingebettet in $C^0(\bar{\Omega})$. Deshalb folgt aus der Bedingung (14) und der Stetigkeit von u , dass ein $\lambda > 0$ existiert mit

$$(17) \quad \inf\{\lambda_f(u(x, t)), \lambda_g(u(x, t)) \mid x \in \bar{\Omega}, t \in [0, T)\} \geq \lambda$$

für ein $T > 0$ genügend klein. Nun folgt aber aus dem Beweis von Satz 6, dass die H^2 -Norm von u abnimmt auf $[0, T)$. Durch wiederholen derselben Argumentation sieht man, dass (17) erfüllt ist für alle $T < \infty$. Somit erhalten wir aus Satz 6, ohne die Voraussetzung (16), dass

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, T)| \leq c_0 e^{-\alpha T} \quad \forall T \geq 0$$

Setzen wir

$$\lambda(r) := \inf\{\lambda_f(s), \lambda_g(s) \mid |s| \leq r\}$$

so gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lambda(r) \geq 1$$

Ist $Df(0) = 0$ und $Dg(0) = 0$, so gibt es ein $r_0 > 0$ mit

$$\lambda(r) \geq 1 \quad \forall r \leq r_0$$

Aus dem Obigen ergibt sich, dass für jedes $\lambda_1 < 1$ eine Zeit $T(\lambda_1)$ existiert, sodass die Bedingung (17) erfüllt ist für alle $t \in [T(\lambda_1), \infty)$. Deshalb konvergiert der Abfallexponent für grosse Zeiten gegen den Wert von α für $\lambda = 1$. Dieses Abfallverhalten kann mit der stärkeren Strukturbedingung (13) auch direkt bewiesen werden für beliebige Dimensionen n . Wir haben somit gezeigt, dass für $n \leq 3$ die Bedingung (14) für grosse Zeiten fast dasselbe Resultat liefert wie (13).

Beweis (von Satz 6)

Aus (8) und Lemma (A7) folgert man leicht

$$E_k(T) + 2V(T) \leq e^{-2k\lambda T}(E_k(0) + 2V(0)) \quad .$$

1.Fall $k^2 < a_0$

Wir wählen ε fest mit $a_0/k > \varepsilon > k$ und schreiben $\|u\|$ statt $\|u\|_{L^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k}{\varepsilon}\right)\|\dot{u}(T)\|^2 + (a_0 - \varepsilon k)\|u(T)\|^2 &= \\ &= \|\dot{u}(T)\|^2 + a_0\|u(T)\|^2 - k(\varepsilon\|u(T)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\dot{u}(T)\|^2) \leq \\ &\leq \|\dot{u}(T)\|^2 + a(u(T), u(T)) + 2k < u(T), \dot{u}(T) > \leq \\ &\leq E_k(T) + 2V(T) \leq e^{-2k\lambda T}(E_k(0) + 2V(0)) \\ &\quad \forall T \in [0, T^+) \quad . \end{aligned}$$

Somit fallen $\|u(T)\|^2$ und $\|\dot{u}(T)\|^2$ wie $e^{-2k\lambda T}$ ab und wegen den letzten beiden Zeilen der obigen Rechnung fällt somit $a(u(T), u(T))$ genau gleich ab. Mit der Gårdingschen Ungleichung erhält man daraus die Behauptung für den Fall der schwachen Dämpfung.

2.Fall $k^2 > a_0$

In seiner Dissertation [25] hat Weidemaier dieses Resultat bewiesen für $f = g = 0$. Sein Beweis lässt sich auf unseren Fall übertragen. Wir betrachten die Funktion

$$v(T) := e^{kT}u(T)$$

und berechnen leicht

$$\|\dot{v}(T)\|^2 = e^{2kT}(k^2\|u(T)\|^2 + 2k < u(T), \dot{u}(T) > + \|\dot{u}(T)\|^2) \quad .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|\dot{v}(T)\|^2 + a(v(T), v(T)) &= e^{2kT}(k^2\|u(T)\|^2 + E_k(T)) \leq \\ &\leq k^2\|v(T)\|^2 + e^{2kT(1-\lambda)}(E_k(0) + 2V(0)) \end{aligned}$$

und somit

$$(18) \quad \|\dot{v}(T)\|^2 \leq (k^2 - a_0)\|v(T)\|^2 + e^{2kT(1-\lambda)}(E_k(0) + 2V(0)) \quad .$$

Wir wählen $\varepsilon := \sqrt{k^2 - a_0} > 0$ und wegen

$$\frac{d}{dt} \|v(T)\|^2 = 2 \langle v(T), \dot{v}(T) \rangle \leq \varepsilon \|v(T)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\dot{v}(T)\|^2$$

erhalten wir daraus

$$\|v(T)\|^2 \leq \|v(0)\|^2 + \int_0^T \frac{1}{\varepsilon} c(T) + \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(k^2 - a_0)\right) \|v(T)\|^2 dt \quad ,$$

wobei

$$c(T) := e^{2kT(1-\lambda)} (E_k(0) + 2V(0)) \quad .$$

Mit der Gronwallschen Ungleichung (Wloka [26], Lemma 29.2) berechnet man

$$\|v(T)\|^2 \leq e^{2T\sqrt{k^2 - a_0}} \left(\|v(0)\|^2 + \int_0^T (c(t)/\sqrt{k^2 - a_0}) e^{-2t\sqrt{k^2 - a_0}} dt \right) \quad .$$

Rechnet man das obige Integral aus und verwendet die Definition von α , d.h.

$$(1 - \alpha) = \max \{ (1 - \lambda)k, \sqrt{k^2 - a_0} \} \quad ,$$

so erhält man

$$\|v(T)\|^2 \leq c_0 e^{2T(1-\alpha)} \quad .$$

Daraus folgt man mittels der Ungleichung (18)

$$\|\dot{v}(T)\|^2 \leq c_0 e^{2T(1-\alpha)} \quad , \quad a(v(T), v(T)) \leq c_0 e^{2T(1-\alpha)} \quad .$$

Verwenden wir nun

$$u(T) = e^{-kT} v(T) \quad , \quad \dot{u}(T) = -ke^{-kT} v(T) + e^{-kT} \dot{v}(T) \quad ,$$

so erhalten wir die Behauptung für den Fall der starken Dämpfung.

3.Fall $k^2 = a_0$

Wir verwenden die Ungleichung (18), die auch bei $k^2 = a_0$ richtig bleibt, und erhalten

$$\|\dot{v}(T)\| \leq c_0 e^{kT(1-\lambda)} \quad .$$

Mit

$$\|v(T)\| \leq \|v(0)\| + \int_0^T \|\dot{v}(t)\| dt$$

folgt somit für $\lambda < 1$ sofort

$$\|v(T)\| \leq \|v(0)\| + \frac{c_0}{k(1-\lambda)} (e^{kT(1-\lambda)} - 1)$$

und für $\lambda = 1$

$$\|v(T)\| \leq \|v(0)\| + Tc_0 \quad .$$

Mit diesen Abschätzungen erhalten wir genau wie im zweiten Fall die Behauptung. □

4. Die Gleichungen der schwingenden Platte

Wir werden die Resultate aus Abschnitt 3 anwenden auf die Gleichung der schwingenden Platte. Die Kraftdichte in transversaler Richtung auf die Platte (bzw. deren Rand) sei gegeben durch die Funktion f (bzw. g). In horizontaler Richtung sollen keine äusseren Kräfte wirken und auf den Rand soll kein Drehmoment wirken. Dasselbe Problem, allerdings mit eingespanntem Rand, wurde in [23] durch von Wahl und in [18] durch den Autor untersucht. Die physikalische Herleitung und die entsprechende Notation übernehmen wir, soweit möglich, aus Landau, Lifschitz [12]. Die Herleitung einer ähnlichen Gleichung ist in Leis [13] angegeben. Wir haben sie in der Einleitung als Anwendungsbeispiel angegeben. Bei ihrer Herleitung wurde die Energie der reinen Dehnung vernachlässigt, deshalb tritt der von Karman-Term $\{u, \chi\}$ nicht auf. Diese Approximation ist allerdings nur gültig für Auslenkungen, die klein sind im Vergleich zur Plattendicke (vergleiche Landau, Lifschitz [12]). Wir werden zuerst die allgemeinere von Karman Gleichung betrachten und lösen (Theorem 2). Zum Schluss zeigen wir, dass die von Leis betrachtete Gleichung eine globale Lösung hat (Theorem 5).

Sei also Ω ein glattes, beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$, das die Ruhelage der isotropen, homogenen Platte der Dicke h beschreibt. Auf dem Rand Γ von Ω seien die äussere Normale ν und der Tangentialvektor μ gegeben durch

$$\nu = (\nu_1, \nu_2), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2) = (-\nu_2, \nu_1).$$

Da das Gebiet glatt ist, können wir die Koeffizienten von ν und μ so auf eine Umgebung von Γ glatt fortsetzen, dass

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \nu = \kappa \mu, \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \mu = -\kappa \nu, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \nu = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \mu = 0,$$

wobei κ die Krümmung des Randes ist. Mit u bezeichnen wir die transversale Auslenkung der Platte aus der Ruhelage und u_1, u_2 seien die horizontalen Auslenkungen. Um unser Problem zu behandeln, benötigen wir die folgenden physikalischen

Größen :

$$\begin{aligned}
 E &= \text{Elastizitätsmodul (Youngsche Zahl)} \\
 \sigma &= \text{Poissonsche Zahl} \quad \sigma \in [0, 1/2] \\
 d &= \frac{Eh^3}{12(1-\sigma)^2} = \text{Biege widerstand der Platte} \\
 m &= \text{spezifische Masse des Materials} \\
 \sigma_{i,j} \quad i, j \in \{1, 2\} &= \text{Spannungstensor} \\
 \chi &= \text{Spannungsfunktion (von Airy)} \\
 u_{i,j} &= \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \frac{1}{2}\partial_i u \partial_j u \\
 &= \text{Verzerrungstensor}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Wir berücksichtigen die Energie der reinen Biegung U_1 , die der reinen Dehnung U_2 und die kinetische Energie T . Diese Näherung ist gerechtfertigt, solange wir nur Auslenkungen u betrachten, die klein sind im Vergleich zur Plattendimension (vgl. [12]). Es gilt

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{D}{2} \int_{\Omega} (\Delta u)^2 + 2(1-\sigma)((\partial_{12}u)^2 - \partial_{11}u \partial_{22}u) \\
 U_2 &= \frac{h}{2} \int_{\Omega} u_{i,j} \sigma_{i,j} \\
 T &= \frac{mh}{2} \int u^2
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Wir wollen das Hamiltonsche Prinzip anwenden und berechnen die Variation der Energieterme wie in [12], allerdings müssen wir in δU_2 auch die entstehenden Randterme berücksichtigen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \delta U_2 &= h \int_{\Omega} \sigma_{i,j} (\partial_j u_i + \partial_j \delta u \partial_i u) \\
 &= -h \int_{\Omega} \partial_j \sigma_{i,j} \delta u_i + \partial_j (\sigma_{i,j} \partial_i u) \delta u + h \int_{\Gamma} (\nu_j \sigma_{i,j}) \delta u_i + (\nu_j \sigma_{i,j} \partial_i u) \delta u
 \end{aligned}$$

Die genaue Form der Variation von U_1 ist in Leis [13] oder auch in [12] angegeben. Da der Ausdruck δu_i nur im obigen Term von δU_2 auftritt, erhalten wir aus dem Hamiltonschen Prinzip auf dem Rand Γ

$$\nu_i \sigma_{i,j} = 0
 \tag{4}$$

da δu_i auf dem Rand beliebig variiert werden darf. Somit verschwinden alle Randintegrale in δU_2 und durch das im Buch von Landau, Lifschitz ([12], Abschnitt 14) genau angegebene Verfahren erhalten wir das folgende Gleichungssystem :

$$(5) \quad \begin{aligned} mh\ddot{u} + d\Delta^2 u &= f(u) + h[u, \chi] && \text{in } \Omega \times J \\ B_1 u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times J \\ B_2 u &= g(u) && \text{auf } \Gamma \times J \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2E} \Delta^2 \chi &= -[u, u] && \text{in } \Omega \times J \\ \chi &= 0 && \text{auf } \Gamma \times J \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \chi &= 0 && \text{auf } \Gamma \times J \end{aligned}$$

wobei

$$(7) \quad \begin{aligned} B_1 u &:= d \left(\left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right)^2 u + \sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)^2 u + \kappa \frac{\partial}{\partial \nu} u \right) \right) \\ B_2 u &:= -d \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \mu} u \right) \\ [u, v] &:= \partial_{11} u \partial_{22} v + \partial_{22} u \partial_{11} v - 2 \partial_{12} u \partial_{12} v \end{aligned}$$

Einzig die Herleitung der Randbedingungen an χ ist in [12] nicht angegeben. Wir benötigen dazu eine kleine Nebenbetrachtung. Die Randbedingung (4) ist äquivalent zu

$$(4') \quad \nu_i \sigma_{i,j} w_j = 0 \quad \forall w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$$

Da die Spannungsfunktion χ durch die Beziehungen

$$\partial_{11} \chi = \sigma_{2,2} \quad \partial_{22} \chi = \sigma_{1,1} \quad \partial_{12} \chi = -\sigma_{1,2}$$

gegeben ist, folgt durch elementare Rechnung (verwende (1))

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \chi \right) &= \kappa \frac{\partial}{\partial \mu} \chi \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \chi \right) &= -\kappa \frac{\partial}{\partial \nu} \chi \end{aligned}$$

Wir fixieren auf jeder Zusammenhangskomponente von Γ einen festen Punkt x_0 und verlangen

$$\chi(x_0) = \frac{\partial}{\partial \nu} \chi(x_0) = \frac{\partial}{\partial \mu} \chi(x_0) = 0 \quad .$$

Da χ durch die obigen Beziehungen zum Spannungstensor $\sigma_{i,j}$ nicht eindeutig bestimmt ist können wir diese Wahl treffen. Fassen wir nun $\frac{\partial}{\partial \nu} \chi$ und $\frac{\partial}{\partial \mu} \chi$ als Funktionen auf dem Rand auf, wobei Γ nach der Bogenlänge μ parametrisiert ist, so wird (8) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für $\frac{\partial}{\partial \nu} \chi$ und $\frac{\partial}{\partial \mu} \chi$ mit Null als eindeutiger Lösung.

Den obigen Rechnungsweg können wir auch rückwärts begehen, d.h. wir schließen von (6) auf (8), und somit auf (4'). Damit haben wir gezeigt, dass (6) die "richtige" Randbedingung ist, denn der aus χ erzeugte Spannungstensor $\sigma_{i,j}$ erfüllt die Randbedingung (4).

Um das System (5)(6) zu lösen, verwenden wir dieselbe Idee wie in von Wahl [23] oder Stahel [18]; wir lösen (6) und setzen die Lösung in (5) ein. Das führt uns (bis auf skalierende Faktoren) auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \mathcal{A}u &= F_1(u) + F_2(u) \\ (P4) \quad B_1 u &= 0 \\ B_2 u &= G(u) \quad , \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &:= \Delta \Delta u + u \\ F_1(u) &:= F(u) + u \\ F_2(u) &:= -[u, A_D^{-1}[u, u]] \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist A_D^{-1} der Lösungsoperator der elliptischen Gleichung (6), der gegebenem $-[u, u]$ das zugehörige χ zuordnet.

Durch elementare Rechnung überprüft man, dass $(\mathcal{A}, B_1, B_2)$ ein reguläres, elliptisches Randwertproblem ist im Sinne von Lions, Magenes ([16] p. 113 ff), falls nur $\sigma \notin \{-3, 1\}$. Diese Bedingung ist aber wegen $\sigma \in [0, 1/2]$ erfüllt. Definieren wir nun

$$a(u, v) := \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \sigma \Delta u \Delta v + (1 - \sigma) \sum_{i,j} \partial_{i,j} u \partial_{i,j} v \quad ,$$

so erhalten wir mittels partieller Integration für $u \in H^4$, $v \in H^2$ die Greensche Formel

$$a(u, v) = \langle \mathcal{A}u, v \rangle + \langle B_1 u, \frac{\partial}{\partial \nu} v \rangle_{\partial} + \langle B_2 u, v \rangle_{\partial}$$

und sehen leicht, dass

$$(9) \quad \begin{aligned} a &\in \mathcal{L}^2(H^2 \times H^2, \mathbb{R}) \\ \alpha(u, u) &\geq \|u\|_{L^2}^2 + (1 - \sigma) \|u\|_{[2]}^2 \quad \forall u \in H^2, \\ \text{wobei } \|u\|_{[2]}^2 &:= \sum_{i,j \in \{1,2\}} \|\partial_{ij} u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Somit sind alle Voraussetzungen an die Differentialoperatoren für den Satz 3.4 erfüllt und wir müssen nur noch zeigen, dass auch die Nichtlinearität F_2 passende Bedingungen erfüllt, um eine milde Lösung von (P4) zu erhalten.

Lemma 1

$$F_2 \in \mathcal{L}^3(H^{7/2-\epsilon} \times H^{7/2-\epsilon} \times H^{7/2-\epsilon}, H^{3/2-\epsilon})$$

Beweis

Sei ∂^2 ein beliebiger Differentialoperator zweiter Ordnung. Dann gilt

$$\partial^2 \in \mathcal{L}(H^{7/2-\epsilon}, H^{3/2-\epsilon}).$$

Bezeichnen wir mit $\circ$ die Multiplikation von zwei Funktionen, so folgt aus den Lemmata 1 und 6 des Anhangs sofort, dass

$$\begin{aligned} \circ &\in \mathcal{L}^2(H^{3/2-\epsilon} \times H^3, H^{3/2-\epsilon}) \\ &\cap \mathcal{L}^2(H^{3/2-\epsilon} \times H^{3/2-\epsilon}, H^1) \end{aligned}$$

wobei $H^{3/2-\epsilon}$ als geeigneter Interpolationsraum zwischen H^1 und H^2 aufzufassen ist. Somit sieht man, dass im folgenden Diagramm alle Abbildungen stetig sind und das Lemma bewiesen ist.

$$\left. \begin{array}{ccc} H^{7/2-\epsilon} & \xrightarrow{\partial^2} & H^{3/2-\epsilon} \\ H^{7/2-\epsilon} & \xrightarrow{\partial^2} & H^{3/2-\epsilon} \\ H^{7/2-\epsilon} & \xrightarrow{\partial^2} & H^{3/2-\epsilon} \end{array} \right\} \xrightarrow{\circ} H^1 \xrightarrow{\partial^2 A_D^{-1}} H^3 \xrightarrow{\circ} H^{3/2-\epsilon}$$

□

Als leichte Konsequenz aus Theorem 3.4 und dem obigen Lemma erhalten wir das folgende

Theorem 2

Ist $0 < \varepsilon$ genügend klein und gilt

$$f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad , \quad g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad ,$$

so gibt es zu jedem Paar

$$u_0 \in H_{\{B\}}^{7/2-\varepsilon} \quad \dot{u}_0 \in H^{3/2-\varepsilon}$$

ein maximales Intervall $J = (T^-, T^+)$ und eine eindeutige schwache Lösung u der Gleichung

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \Delta \Delta u &= F(u) - [u, A_D^{-1}[u, u]] \\ B_1 u &= 0 \\ B_2 u &= G(u) \quad , \end{aligned}$$

mit

$$u \in C^0(J, H_{\{B\}}^{7/2-\varepsilon}) \cap C^1(J, H^{3/2-\varepsilon}) \cap C^2(J, H^{-1/2-\varepsilon}) \quad ,$$

welche die Anfangsbedingungen $u(0) = u_0 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0$ erfüllt. Gilt für eine Funktion $k \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(10) \quad \|u(t)\|_{H^{7/2-\varepsilon}} \leq k(t) \quad \forall t \in [0, T^+) \quad ,$$

so ist $T^+ = \infty$. Ein analoges Resultat gilt für T^- .

Bemerkung

Die Voraussetzung (10) kann abgeschwächt werden zu

$$(10') \quad \|u(t)\|_{H^{2+\varepsilon}} \leq k(t) \quad \forall t \in [0, T^+) \quad ,$$

für ein $\varepsilon > 0$ oder zu

$$(10'') \quad \|u(t)\|_{H^2} + \|[u(t), u(t)]\|_{L^p} \leq k(t) \quad \forall t \in [0, T^+) \quad ,$$

für ein $p > 1$. Die Voraussetzungen (10), (10') und (10'') sind äquivalent und implizieren alle $T^+ = \infty$. Der Term $[u, u]$ in (10'') steht in enger Verbindung zur Gauss'schen Krümmung der Plattenfläche (siehe von Wahl [23]).

Beweis (der Bemerkung)

Eine Aussage ähnlicher Art ist in [18] bewiesen, und wir verwenden hier dieselben Ideen. Die Implikation von (10) zu (10') und zu (10'') ist elementar. Wir müssen zeigen, dass aus (10'') die Bedingung (10) folgt. Dazu betrachten wir die folgende Integralgleichung, welche der Formel (2.12) für das Problem (P4) entspricht.

$$(11) \quad \begin{aligned} u(T) = & \cos(TA^{1/2})u(0) + \sin(TA^{1/2})A^{-1/2}\dot{u}(0) \\ & + \int_0^T \sin((T-t)A^{1/2}) \left(A^{-1/2}F(u(t)) + A^{1/2}RG(u(t)) - \right. \\ & \left. - A^{-1/2}\{u(t), A_D^{-1}[u(t), u(t)]\} \right) dt \end{aligned}$$

Da u eine schwache Lösung ist, gilt (11) wegen Proposition 1.1. Aus (10'') folgt

$$\begin{aligned} \|F(u(t))\|_{H^1} & \leq c k(t) \\ \|G(u(t))\|_{H^{1/2}(\Gamma)} & \leq c k(t) \end{aligned} \quad ,$$

und das Diagramm

$$\left. \begin{array}{ccc} u & \in H^3 & \xrightarrow{\theta^2} H^1 \\ [u, u] & \in L^p & \xrightarrow{\theta^2 A_D^{-1}} W^{2,p} \end{array} \right\} \xrightarrow{\circ} H^1$$

zeigt

$$\|F_2(u(t))\|_{H^1} \leq c k(t) \|u(t)\|_{H^3} \quad .$$

Betrachten wir (11) als Integralgleichung in $C^0(J, H^3)$ und verwenden die Gronwall'sche Ungleichung, so erhalten wir sofort

$$\|u(t)\|_{H^3} \leq k_1(t) \quad \forall t \in [0, T^+) \quad ,$$

wobei k_1 eine geeignete stetige Funktion ist. Durch Vergleichen der Integralformeln (2.12) und (2.12') sieht man sofort, dass

$$\|\dot{u}(t)\|_{H^1} \leq k_1(t) \quad \forall t \in [0, T^+) \quad .$$

Somit gilt auch

$$\begin{aligned} \|A^{-1}F_1^{(1)}(u(t), \dot{u}(t))\|_{H^{7/2-\epsilon}} & \leq c k_1^2(t) \\ \|RG^{(1)}(u(t), \dot{u}(t))\|_{H^{7/2-\epsilon}} & \leq c k_1^2(t) \\ \|A^{-1/2}F_2(u(t))\|_{H^{7/2-\epsilon}} & \leq c k_1^2(t) \|u(t)\|_{H^{7/2-\epsilon}} \quad , \end{aligned}$$

wobei für die letzte Ungleichung das Diagramm im Beweis von Lemma 4.1 zu betrachten und entsprechend zu modifizieren ist (verwende in den beiden letzten Zeilen H^3 statt $H^{7/2-\epsilon}$). Nun wenden wir die Gronwallsche Ungleichung an auf die Gleichung (M1) in $C^0(J, H^{7/2-\epsilon})$ und erhalten sofort (10). □

Wir wollen für die obige Lösung u eine Energiegleichung herleiten und benötigen dazu eine leicht verallgemeinerte Version des Lemmas I.4.2 aus Lions [15].

Lemma 3

Sind $u, v \in H^2(\Omega)$ und $w \in H_0^2(\Omega)$ so gilt

$$\langle [u, v], w \rangle = \langle [w, v], u \rangle .$$

Beweis

Für reguläre Funktionen u, v konstruieren wir eine $\mathbb{R}^2$ -wertige Funktion

$$h(u, v) := (\partial_1 u \partial_{22} v - \partial_2 u \partial_{12} v , \partial_2 u \partial_{11} v - \partial_1 u \partial_{12} v)$$

und sehen sofort, dass $\operatorname{div} h(u, v) = [u, v]$. Setzen wir

$$\langle h(u, v), \nabla w \rangle := \sum_{i=1,2} \langle h_i(u, v), \partial_i w \rangle ,$$

so berechnet man leicht

$$\langle h(u, v), \nabla w \rangle = \langle h(w, v), \nabla u \rangle .$$

Somit erhalten wir, wegen $w \in H_0^2$, durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \langle [u, v], w \rangle &= \langle \operatorname{div} h(u, v), w \rangle = - \langle h(u, v), \nabla w \rangle = \\ &= - \langle h(w, v), \nabla u \rangle = \\ &= \langle \operatorname{div} h(w, v), u \rangle = \langle [w, v], u \rangle . \end{aligned}$$

Das übliche Dichtheitsargument liefert nun die Behauptung. □

Aus dem Diagramm im Beweis von Lemma 1 liest man ab, dass aus den Stetigkeitseigenschaften von u

$$\chi \in C^0(J, H^5) \cap C^0(J, H_0^2)$$

folgt. Verwendet man das obige Lemma, so erhält man (vgl. Herleitung von Formel (3.7))

$$\begin{aligned} & \|\Delta\chi(T)\|_{L^2}^2 - \|\Delta\chi(0)\|_{L^2}^2 = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \langle \Delta\chi(t+\epsilon) - \Delta\chi(t-\epsilon), \Delta\chi(t) \rangle dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\epsilon} \int_0^T \langle [u(t+\epsilon), u(t+\epsilon)] - [u(t-\epsilon), u(t-\epsilon)], \chi(t) \rangle dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\epsilon} \int_0^T \langle [\chi(t), u(t)], u(t+\epsilon) - u(t-\epsilon) \rangle + \\ & \quad + \langle [\chi(t), u(t+\epsilon)], u(t+\epsilon) - u(t) \rangle + \\ & \quad + \langle [\chi(t), u(t-\epsilon)], u(t) - u(t-\epsilon) \rangle dt = \\ &= -4 \int_0^T \langle F_2(u(t)), \dot{u}(t) \rangle dt . \end{aligned}$$

Ersetzen wir in der Herleitung von (3.7) $2k\dot{u}$ durch $F_2(u)$ so sieht man, dass

$$E(T) := \|\dot{u}(T)\|_{L^2}^2 + a_0(u(T), u(T)) + \frac{1}{2} \|\Delta\chi(T)\|_{L^2}^2 + 2V(T)$$

unabhängig ist von $T \in J$. Dabei ist $V(T)$ konstruiert aus f und g , wie in Abschnitt 3 und

$$a_0(u, v) := a(u, v) - \langle u, v \rangle .$$

Die obige Gleichung entspricht der Energiegleichung des Problems (P4).

Satz 4

Gilt in Theorem 2 zusätzlich die Strukturbedingung

$$v_f(s) \geq 0 \quad v_g(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad ,$$

so sind $\|\dot{u}(T)\|_{L^2}$, $\|u(T)\|_{H^2}$ und $\|\chi(T)\|_{H^2}$ a-priori beschränkt auf J .

Der Beweis des Satzes ist nach den obigen Vorbereitungen eine triviale Konsequenz der Gårdingschen Ungleichung (9) und der Energiegleichung. Sind die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt, so bleibt in (10'') nur die a-priori Schranke für $\|u, u\|_{L^p}$ stehen, da $\|u\|_{H^2}$ schon beschränkt ist. Dem Autor sind keine Resultate bekannt, die es erlauben die verbleibende Voraussetzung in (10'') zu verifizieren. Somit können auch wir die globale Existenz der Lösung u von (P4) nicht zeigen, ohne zusätzliche a-priori Abschätzungen zu verlangen.

In der Einleitung der Dissertation haben wir die Gleichung der schwingenden Platte mit Auslenkungen, die klein sind gegenüber der Plattendicke betrachtet. Sie entspricht genau dem Problem (P4), aber mit $F_2 = 0$. Somit sind wir im Rahmen von Abschnitt 3 und erhalten als Konsequenz der Theoreme 3.4 und 3.5 das folgende Resultat, ohne die Lemmata dieses Abschnitts. Es ist zu beachten, dass die Strukturbedingungen in diesem Fall die globale Existenz der Lösung implizieren.

Theorem 5

Ist $0 < \epsilon$ genügend klein und gilt

$$f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad , \quad g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad ,$$

so gibt es zu jedem Paar

$$u_0 \in H_{\{B\}}^{7/2-\epsilon} \quad \dot{u}_0 \in H^{3/2-\epsilon}$$

ein maximales Intervall $J = (T^-, T^+)$ und eine eindeutige schwache Lösung u der Gleichung

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \Delta \Delta u &= F(u) \\ B_1 u &= 0 \\ B_2 u &= G(u) \quad , \end{aligned}$$

mit

$$u \in C^0(J, H_{\{B\}}^{7/2-\epsilon}) \cap C^1(J, H^{3/2-\epsilon}) \cap C^2(J, H^{-1/2-\epsilon}) \quad ,$$

welche die Anfangsbedingungen $u(0) = u_0 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0$ erfüllt.

Gelten zusätzlich die Strukturbedingungen

$$v_f(s) \geq 0 \quad v_g(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad ,$$

so existiert die Lösung global ($T^+ = \infty$) und $\|\dot{u}(T)\|_{L^2} + \|u(T)\|_{H^2}$ ist a-priori beschränkt auf J .

5. Anhang

Wir beweisen oder zitieren einige elementare Resultate, die es uns ermöglichen, konkrete nichtlineare Terme in den abstrakten Rahmen dieser Arbeit zu stellen. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir

$$\begin{aligned}\|u\|_p &:= \|u\|_{L^p(\Omega)} \\ \|u\|_{k,p} &:= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

wobei Ω wieder ein beschränktes, glattes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ ist.

Lemma 1

Seien $1 < p, q < \infty$, beide verschieden von n . Dann haben wir das folgende Resultat über die Multiplikation von Funktionen in Sobolevräumen.

(α) Gilt $1 \geq \frac{1}{s} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ und $u \in L^p$, $v \in L^q$, so ist $uv \in L^s$ und

$$\|uv\|_s \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Falls $p = \infty$, können wir $s = q$ wählen.

(β) Gilt $1 \geq \frac{1}{s} := \max \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}, \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right\}$ und $u \in W^{1,p}$, $v \in W^{1,q}$, so ist $uv \in W^{1,s}$ und

$$\|uv\|_{1,s} \leq c \|u\|_{1,p} \|v\|_{1,q}.$$

Die Konstante c hängt nicht von u und v ab.

Beweis

Die Höldersche Ungleichung liefert uns direkt die Behauptung (α). Um (β) zu beweisen, verwenden wir

$$\partial_i(uv) = v\partial_i u + u\partial_i v \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

und die Soboleveinbettungen

$$(1) \quad \begin{aligned} W^{1,p} &\hookrightarrow L^{p_1} & \frac{1}{p_1} &:= \frac{1}{p} - \frac{1}{n} & \text{falls } n > p \\ W^{1,q} &\hookrightarrow L^{q_1} & \frac{1}{q_1} &:= \frac{1}{q} - \frac{1}{n} & \text{falls } n > q \\ W^{1,p} &\hookrightarrow C(\bar{\Omega}) & & & \text{falls } n < p \\ W^{1,q} &\hookrightarrow C(\bar{\Omega}) & & & \text{falls } n < q \end{aligned}$$

Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

(i) $p, q < n$. Dann ist $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ und

$$\begin{aligned}\|\partial_i(uv)\|_s &\leq \|v\|_{q_1} \|\partial_i u\|_p + \|u\|_{p_1} \|\partial_i v\|_q \\ &\leq c \|u\|_{1,p} \|v\|_{1,q}.\end{aligned}$$

(ii) $p < n$ und $q > n$. Dann ist $\frac{1}{s} = \frac{1}{p}$ und das Verfahren aus (i) ist mit L^∞ anstelle von L^{q_1} durchzuführen. Der Fall $q < n$ und $p > n$ ist analog zu behandeln.

(iii) $p, q > n$. Dann ist $\frac{1}{s} = \max\{\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\}$ und wir können L^{p_1} und L^{q_1} durch L^∞ ersetzen.

□

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Für jede Abbildung u , die auf Ω (resp. $\bar{\Omega}$) definiert ist, setzen wir

$$\begin{aligned}(F(u))(x) &:= f(u(x)) \quad \text{und} \\ (F'(u))(x) &:= Df(u(x)) \quad \forall x \in \Omega.\end{aligned}$$

F (resp. F') heisst Nemytskiioperator von f (resp. Df). Es gelten die folgenden Lemmata.

Lemma 2

(α) Sind $p, q \geq 1$ und

$$|f(s)| \leq a(1 + |s|^{q/p})$$

dann ist

$$F \in C^0(L^q, L^p) \quad \text{mit} \quad \|F(u)\|_p \leq c(1 + \|u\|_q^{q/p}).$$

(β) Ist $1 \leq p \leq q < n$ und

$$|Df(s)| \leq a(1 + |s|^\gamma)$$

mit $\gamma \leq \frac{n}{p} \frac{q-p}{n-q}$, dann ist

$$F \in C^0(W^{1,q}, W^{1,p}) \quad \text{mit} \quad \|F(u)\|_{1,p} \leq c(1 + \|u\|_{1,q}^{\gamma+1}).$$

(γ) Für $n < q$ gilt

$$F \in C^0(W^{1,q}, W^{1,q}) \quad \text{mit} \quad \|F(u)\|_{1,q} \leq h(\|u\|_{1,q}),$$

wobei $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweis

Wir müssen nur die Abschätzungen zeigen, da die Stetigkeit von Nemytskii-operatoren eine Folge ihrer Beschränktheit ist (vergleiche Krasnoselskii [11], Theorem 2.1). Der Beweis von (α) ist trivial. Um (β) zu zeigen, verwenden wir die Soboleveinbettung (1). Lemma 1 zeigt, dass die Multiplikation stetig und bilinear ist von $L^r \times L^q$ in L^p , falls $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Wegen

$$\gamma = \frac{nq}{n-q} \frac{q-p}{pq} = q_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

folgt aus (α) , dass

$$F' \in C^0(L^{q_1}, L^r) \quad \text{mit} \quad \|F'(u)\|_r \leq c(1 + \|u\|_{q_1}^{q_1/r})$$

Für glatte Funktionen u gilt $\partial_i F(u) = F'(u) \partial_i u$, und wir erhalten

$$\|\partial_i F(u)\|_p \leq \|F'(u)\|_r \|\partial_i u\|_q \leq c(1 + \|u\|_{1,q}^\gamma) \|u\|_{1,q}$$

Die Voraussetzungen implizieren

$$|f(s)| \leq a(1 + |s|^{\gamma+1})$$

und wegen $\frac{q_1}{p} > \gamma + 1$ gilt

$$\|F(u)\|_p \leq c(1 + \|u\|_{q_1}^{\gamma+1})$$

Somit haben wir die verlangte Ungleichung für glatte Funktionen gezeigt, und die Behauptung folgt mit einem üblichen Dichtheitsargument.

Der Beweis von (γ) verläuft analog zu (β) , wobei wir verwenden, dass

$$W^{1,q} \subset C^0(\Omega), \quad F, F' \in C^0(C^0(\Omega), C^0(\bar{\Omega})) \quad \text{und}$$

$$\sup_{z \in \bar{\Omega}} |f(u(z))| \leq \sup_{|s| \leq c\|u\|_{1,q}} |f(s)| =: h_0(\|u\|_{1,q})$$

□

Lemma 3

Da $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, haben wir die folgenden Resultate:

$$(\alpha) \quad \begin{aligned} F &\in C^1(C^0(\Omega), C^0(\bar{\Omega})) \\ DF(u)h &= F'(u)h \quad \forall u, h \in C^0(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Gilt $0 < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} \leq 1$ und $|Df(s)| \leq a(1 + |s|^{(q/p)-1})$, dann ist

$$F \in C^1(L^q, L^p), \quad DF(u)h = F'(u)h \quad \forall u, h \in L^q$$

$$(\beta) \quad \begin{aligned} \|F(u_1) - F(u_0)\|_p &\leq c(1 + \|u_1\|_q + \|u_0\|_q)^{(q/p)-1} \|u_1 - u_0\|_q \\ &\quad \forall u_0, u_1 \in L^q \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist F beschränkt auf beschränkten Mengen.

Beweis

Wir zeigen (β) und verwenden dazu eine Variation des Beweises von Lemma 20.1 aus Vainberg [22]. Für $\lambda \in [0, 1]$ sei

$$u_\lambda(x) := u_0(x) + \lambda(u_1(x) - u_0(x))$$

Aus

$$F(u_1)(x) - F(u_0)(x) = (u_1(x) - u_0(x)) \int_0^1 Df(u_\lambda(x)) d\lambda$$

folgt mit der Hölderschen Ungleichung ($\frac{1}{r} := \frac{p}{q}$, $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p}{q}$)

$$\begin{aligned} \|F(u_0) - F(u_1)\|_p^p &\leq \\ &\leq \left(\int_\Omega |u_1(x) - u_0(x)|^{pr} dx \right)^{1/r} \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 |Df(u_\lambda(x))| d\lambda \right)^{pr'} dx \right)^{1/r'} \\ &\leq \|u_1 - u_0\|_q^p \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 a(1 + |u_\lambda(x)|^{(q/p)-1}) d\lambda \right)^{pq/(q-p)} dx \right)^{1-(p/q)} \\ &\leq c \|u_1 - u_0\|_q^p \left(1 + \left(\int_\Omega |u_\lambda(x)|^{(q-p)q/(q-p)} d\lambda \right) dx \right)^{1-(p/q)} \\ &\leq c \|u_1 - u_0\|_q^p \left(1 + \|u_0\|_q^q + \|u_1\|_q^q \right)^{1-(p/q)} \\ &\leq \|u_1 - u_0\|_q^p c (1 + \|u_1\|_q + \|u_0\|_q)^{(q/p-1)p} \end{aligned}$$

Somit haben wir die behauptete Ungleichung bewiesen. Die Differenzierbarkeit und die Formel für die Ableitung werden durch ähnliche Rechnungen verifiziert (vgl. Vainberg [22], Theorem 20.1). Die Behauptung (α) lässt sich ebenso verifizieren.

□

Lemma 4

Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $p, q \geq 1$. Dann gilt unter den Voraussetzungen

$$(\alpha) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} < \frac{1}{n}$$

oder

$$\begin{aligned} (\beta) \quad &\frac{1}{n} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \right), \quad \frac{1}{q} < \frac{1}{p} \\ &|D^2 f(s)| \leq a(1 + |s|^{\gamma-2}) \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ &\text{mit } \gamma := \left(\frac{n}{p} - 1 \right) / \left(\frac{n}{q} - 1 \right) \end{aligned}$$

die Lipschitzabschätzung

$$\|F(u_1) - F(u_0)\|_{1,p} \leq c(1 + \|u_1\|_{1,q} + \|u_0\|_q)^{\gamma-1} \|u_1 - u_0\|_{1,q} \\ \forall u_0, u_1 \in W^{1,q}$$

und

$$F \in C^1(W^{1,q}, W^{1,p}), \quad DF(u)h = F'(u)h \quad \forall u, h \in W^{1,q}.$$

Der Operator F ist beschränkt auf beschränkten Mengen.

Beweis

Wir beweisen zuerst (β) und setzen dazu $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Verwenden wir nun (1), so erhalten wir

$$\frac{q_1}{r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \left(\frac{qn}{n-p-q}\right) = \frac{q(n-p)}{p(n-p-q)} = \gamma - 1$$

Setzen wir $F''(u)(x) := D^2 f(u(x))$, so erhalten wir mit Lemma 3

$$F' \in C^1(L^{q_1}, L^r), \quad DF'(u)h = F''(u)h \quad \forall u, h \in L^{q_1}$$

und die Abschätzung

$$\|F'(u_1) - F'(u_0)\|_r \leq c(1 + \|u_1\|_{q_1} + \|u_0\|_{q_1})^{\gamma-2} \|u_1 - u_0\|_{q_1} \quad \forall u_0, u_1 \in L^{q_1}.$$

Beachte, dass wir Lemma 3 nur anwenden dürfen, wenn $\frac{1}{q_1} < \frac{1}{r}$. Diese Bedingung ist erfüllt wegen

$$\frac{q_1}{r} > 1 \iff (q-p)n > (n-q)p \iff q(n+p) > 2np \\ \iff \frac{1}{q} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \right).$$

Aus den Voraussetzungen folgt

$$|Df(s)| \leq a(1 + |s|^{\gamma-1}).$$

Wegen

$$\frac{q_1}{r} = \frac{q_1}{r} + \frac{q_1}{q} = \gamma - 1 + \frac{q_1}{q} > \gamma$$

folgt aus Lemma 3

$$F \in C^1(L^{q_1}, L^p), \quad DF(u)h = F'(u)h \quad \forall u, h \in L^{q_1}$$

und die Abschätzung

$$\|F(u_1) - F(u_0)\|_p \leq c(1 + \|u_1\|_{q_1} + \|u_0\|_{q_1})^{\gamma-1} \|u_1 - u_0\|_{q_1} \quad \forall u_0, u_1 \in L^{q_1}.$$

Seien nun $u, h \in W^{1,q}$ mit $\|u\|_{1,q} \leq M$, dann ist

$$\begin{aligned} \|\partial_i(F(u+h) - F(u) - F'(u)h)\|_p &\leq \\ &\leq \|F'(u+h)(\partial_i u + \partial_i h) - F'(u)\partial_i u - F''(u)(\partial_i u)h - F'(u)\partial_i h\|_p \leq \\ &\leq \|F'(u+h) - F'(u)\|_r \|\partial_i h\|_q + \|F''(u+h) - F''(u)\|_r \|\partial_i u\|_q \leq \\ &\leq c(M, f) \cdot o(\|h\|_{1,q}). \end{aligned}$$

Damit ist die Differenzierbarkeit gezeigt und die Lipschitzabschätzung folgt aus den obigen Ungleichungen.

Um (α) zu zeigen, gehen wir genau gleich vor wie im Beweis von (β). Aber wir ersetzen L^{q_1} durch $C^0(\bar{\Omega})$ und p durch q . Dann erhalten wir durch dieselben Schritte wie im zweiten Teil des Beweises von (β) die Behauptung. □

Lemma 5

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes, nichttriviales Intervall und E_j , $j = 1, \dots, 4$ seien Funktionenräume über Ω mit

$$\begin{aligned} u &\in C^0(J, E_1) \cap C^1(J, E_2) \\ F &\in C^1(E_1, E_3), \quad DF(u)h = F'(u)h \quad \forall u, h \in E_1 \\ F' &\in C^0(E_1, E_4) \end{aligned}$$

und die Multiplikation sei stetig von $E_4 \times E_2$ nach E_3 . Dann gilt

$$\begin{aligned} F(u(\cdot)) &\in C^1(J, E_3) \text{ mit} \\ \frac{d}{dt} F(u(t)) &= F'(u(t))\dot{u}(t). \end{aligned}$$

Beweis

Wir verwenden Faltungsresultate und benötigen dazu eine sogenannte Approximation der Identität. Sei für $\tau \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\tau) := \begin{cases} c \exp(-1/(1-\tau^2)), & \text{falls } |\tau| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei ϵ so gewählt ist, dass $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. Für $\epsilon > 0$ setzen wir

$$\begin{aligned}\varphi_\epsilon(\tau) &:= \frac{1}{\epsilon} \varphi\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right) \\ u_\epsilon(t) &:= (\varphi_\epsilon * u)(t)\end{aligned}$$

und sehen, dass u_ϵ (lokal) gleichmässig gegen u konvergiert in E_1 und

$$\dot{u}_\epsilon(t) = (\dot{\varphi}_\epsilon * u)(t) = (\varphi_\epsilon * \dot{u})(t)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}u_\epsilon &\in C^1(J, E_2) \cap C^1(J, E_1) \\ F(u_\epsilon(\cdot)) &\in C^1(J, E_3), \quad \frac{d}{dt} F(u_\epsilon(t)) = F'(u_\epsilon(t)) \dot{u}_\epsilon(t)\end{aligned}$$

Konvergiert ϵ gegen 0 so erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{u}_\epsilon &\longrightarrow \dot{u} \quad \text{in } E_2, \\ F(u_\epsilon(t)) &\longrightarrow F(u(t)) \quad \text{in } E_3, \\ F'(u_\epsilon(t)) &\longrightarrow F'(u(t)) \quad \text{in } E_4, \\ \frac{d}{dt} F(u_\epsilon(t)) &\longrightarrow F'(u(t)) \dot{u}(t) \quad \text{in } E_3,\end{aligned}$$

wobei alle Konvergenzen lokal gleichmässig bezüglich t sind. Daraus können wir die Behauptung ablesen. □

Das folgende Lemma ist eine Liste von Soboleveinbettungen, die wir in Abschnitt 3 verwenden. Die Beweise sind gegeben in Triebel [21] oder Adams [1].

Lemma 6

Für $\epsilon > 0$ genügend klein gelten die folgenden Einbettungen:

$$\begin{aligned}(\alpha) \quad H^{3/2-\epsilon} &\hookrightarrow \begin{cases} C^0(\Omega) & \text{für } n = 1, 2 \\ L^{q_n} & \frac{1}{q_n} = \frac{n-3+2\epsilon}{2n} \quad \text{für } n \geq 3 \\ W^{1,q_1} & \frac{1}{q_1} = \frac{n-1+2\epsilon}{2n} \quad \text{für } n \geq 1 \end{cases} \\ (\beta) \quad W^{1,p_1} &\hookrightarrow H^{1/2+\epsilon} \quad \frac{1}{p_1} = \frac{n+1-2\epsilon}{2n} \quad \text{für } n \geq 1\end{aligned}$$

$$(\gamma) \quad L^{p_0} \hookrightarrow H^{-1/2-\epsilon} \quad \begin{cases} \frac{1}{p_0} < 1 & \text{für } n = 1 \\ \frac{1}{p_0} = \frac{n+1+2\epsilon}{2n} & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$$

$$(\delta) \quad H^{7/2-\epsilon} \hookrightarrow \begin{cases} C^0(\bar{\Omega}) & \text{für } n \leq 6 \\ L^{q_2} & \frac{1}{q_2} = \frac{n-7+2\epsilon}{2n} \quad \text{für } n \geq 7 \\ C^1(\bar{\Omega}) & \text{für } n \leq 4 \\ W^{1,q_3} & \frac{1}{q_3} = \frac{n-5+2\epsilon}{2n} \quad \text{für } n \geq 5 \end{cases}$$

$$(\epsilon) \quad H^2 \hookrightarrow \begin{cases} C^0(\bar{\Omega}) & \text{für } n \leq 3 \\ L^{q_4} & \frac{1}{q_4} < 1/2 \quad \text{für } n = 4 \\ L^{q_4} & \frac{1}{q_4} = \frac{n-4}{2n} \quad \text{für } n \geq 5 \\ C^1(\bar{\Omega}) & \text{für } n = 1 \\ W^{1,q_5} & \frac{1}{q_5} < 1/2 \quad \text{für } n = 2 \\ W^{1,q_5} & \frac{1}{q_5} = \frac{n-2}{2n} \quad \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

Lemma 7 ist eine elementare Erweiterung der Gronwall'schen Ungleichung, indem wir nicht nur das Wachstum von Funktionen behandeln können, sondern auch das Abfallverhalten.

Lemma 7

Sei $v \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$v(T) - v(T_0) \leq -\alpha \int_{T_0}^T v(t) dt \quad \forall 0 \leq T_0 \leq T \quad .$$

Dann ist

$$v(T) \leq v(0)e^{-\alpha T} \quad \forall T > 0 \quad .$$

Beweis

Ist $\alpha < 0$, so haben wir die übliche Gronwall'sche Ungleichung. Für $\alpha > 0$ setzen wir

$$w(T) := v(T) - e^{-\alpha T} v(0)$$

und haben somit zu zeigen, dass $w(T) \leq 0$ für alle positiven T . Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Gibt es ein T mit $w(T) > 0$, dann existiert auch ein $T_0 \in (0, T)$ mit $w(T_0) = 0$ und $w(t) \leq 0$ für alle $t \in [T_0, T]$. Also ist

$$\begin{aligned} 0 < w(T) &= w(T) - w(T_0) = -e^{-\alpha T} v(0) + e^{-\alpha T_0} v(0) + v(T) - v(T_0) \\ &\leq \int_{T_0}^T \alpha e^{-\alpha t} v(0) dt - \alpha \int_{T_0}^T v(t) dt \\ &\leq -\alpha \int_{T_0}^T w(t) dt < 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir einen Widerspruch erreicht, und das Lemma ist bewiesen. □

Referenzen

- [1] R. Adams : Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [2] H.Amann : Existence and regularity for semilinear parabolic evolution equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 11 (1984), pp.593-676
- [3] H.Amann : On abstract parabolic fundamental solutions. J. Math. Soc. Japan, erscheint demnächst.
- [4] H.Amann : Semigroups and nonlinear evolution equations. J. Lin. Alg. Appl., erscheint demnächst.
- [5] H.Amann : Parabolic evolution equations and nonlinear boundary conditions. (1986)
- [6] H.Amann : Parabolic evolution equations with nonlinear boundary conditions. Proc. Symposia in Pure Mathematics 5 (1986), 17-27.
- [7] J.Bergh, J.Löfström : Interpolation Spaces, an Introduction. Springer 1976.
- [8] H.O.Fattorini : The Cauchy Problem. Addison-Wesley Publishing Company, 1983
- [9] J. Goldstein : Semigroups of Linear Operators and Applications. Oxford University Press, 1985.
- [10] P.Grisvard : Caractérisation de quelques espaces d'interpolation. Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967), 40-63.
- [11] M.A. Krasnosel'skii : Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Pergamon Press, 1963.
- [12] L.D.Landau, E.M.Lifschitz : Lehrbuch der Theoretischen Physik vii. Akademie-Verlag, Berlin, 1975.
- [13] R. Leis : Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics. Teubner Stuttgart, 1985.
- [14] H.Levine, R.Smith : A potential well theory for the wave equation with a nonlinear boundary condition. Erscheint demnächst.
- [15] J.L. Lions : Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaire. Dunod Paris, 1969.
- [16] J.L. Lions, E. Magenes : Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications I. Springer 1972.
- [17] W.Rudin : Functional Analysis. McGraw-Hill, 1973
- [18] A.Stahel : A remark on the equation of the vibrating plate. Proc. Royal Soc. Edinburgh.
- [19] H.Tanabe : Equations of Evolution. Pitman, 1979.

- [20] M.Taylor : Pseudodifferential Operators. Princeton University Press, 1981.
- [21] H.Triebel : Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North Holland, Amsterdam, 1978.
- [22] M.M. Vainberg : Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators. Holden-Day, 1964.
- [23] W. von Wahl : On nonlinear evolution equations in a Banach space and on nonlinear vibrations of the clamped plate. Bayreuther Mathematische Schriften, Heft 7 (1981), 1-93.
- [24] W. von Wahl : Corrections to my paper: ... (siehe [23]) . Bayreuther Mathematische Schriften, Heft 20 (1985), 205-209.
- [25] P. Weidemaier : Über lokale und globale Existenz klassischer Lösungen für Randwertprobleme quasilinearer hyperbolischer Gleichungen 2.Ordnung. Dissertation Bayreuth, 1985.
- [26] J. Wloka : Partielle Differentialgleichungen. Teubner Stuttgart, 1982.

Andreas Stahel
 Mathematisches Institut
 Universität Zürich
 Rämistrasse 74
 CH-8001 Zürich

Lebenslauf

Geboren wurde ich, Andreas Paul Stahel, Bürger von Elgg ZH, am 22. Juli 1959 in Frauenfeld.

Im Frühling 1974 trat ich in die Kantonsschule Frauenfeld ein, an der ich im Herbst 1978 mit der Matura (Typus C) abschloss.

Im Oktober 1979 immatrikulierte ich mich an der Universität Zürich zum Studium der Mathematik, mit Theoretischer Physik und Experimentalphysik als Nebenfächern. Ich besuchte Vorlesungen bei folgenden Dozenten:

H. Amann, Ph. Clement, R. Engfer, W. Furter, H. Gross, P. Hess, H. Irminger, H. Jarchow, H. Keller, H.H. Keller, W. Kündig, G. Mancini, P.F. Meier, V. Meyer, W. Reichart, R. Rössel, G. Scharf, I. Schoenenberger, H.R. Schwarz, H.H. Storrer, A. Thellung, P. Truöl.

Im Oktober 1983 erlangte ich das Diplom mit der Arbeit: "Verzweigungen von periodischen Orbits bei autonomen Differentialgleichungen", die unter der Leitung von H. Amann entstanden war. Die vorliegende Dissertation ist auch durch ihn betreut worden.

Seit 1983 arbeite ich als Assistent am Mathematischen Institut der Universität Zürich.

Dezember 1986

Andreas Stahel

